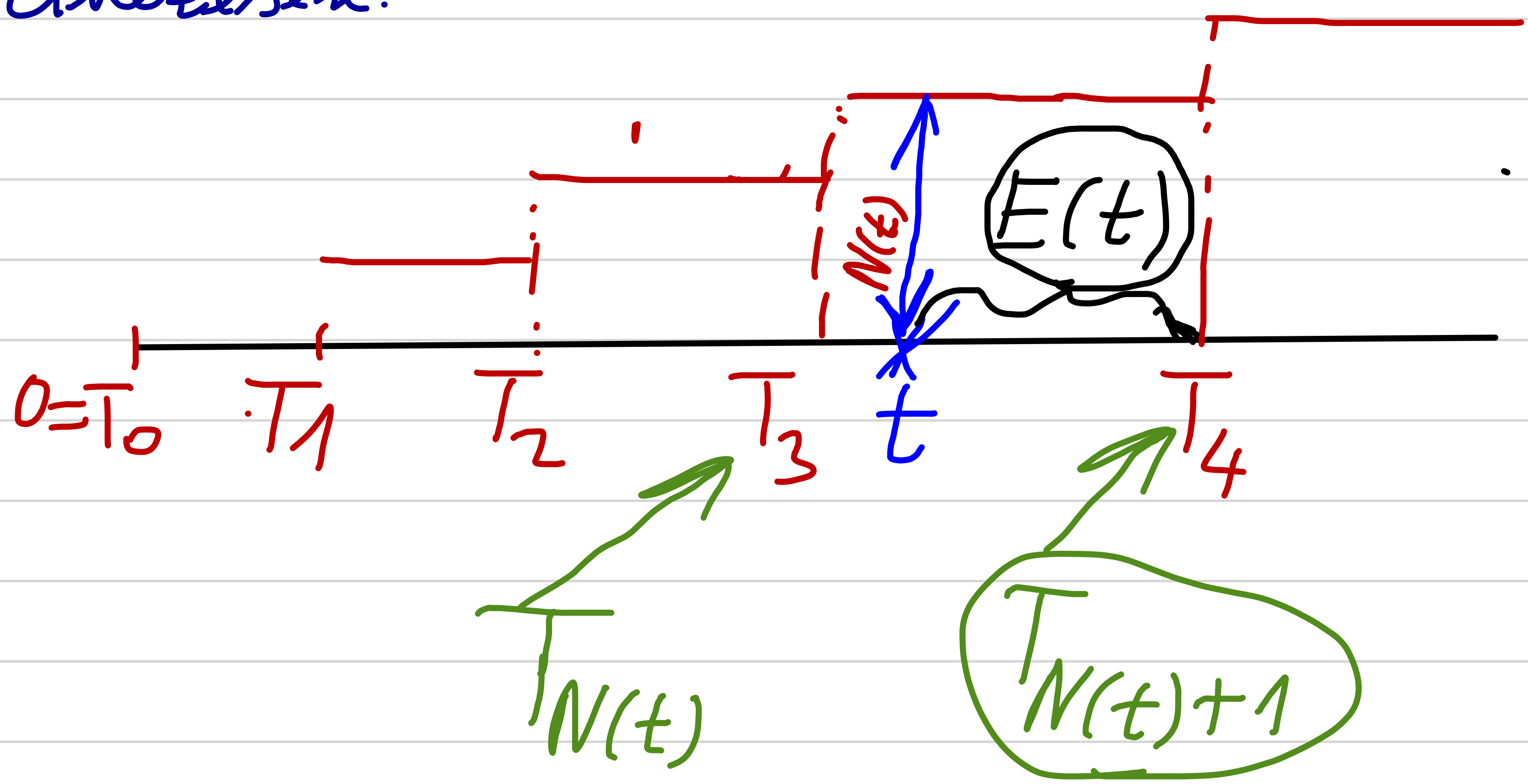
$N(t)$

Legyen T_n egy Poisson (λ) folyamatban az n-edik beérkezés ideje. Legyen $E(t) := T_{N(t)+1} - t$ vagyis $E(t)$-et az idő amennyit várni kell, a t időpont után a következő esemény bekövetkezésére.



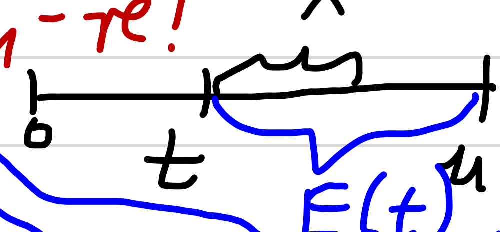
Bizonyítsuk be, hogy

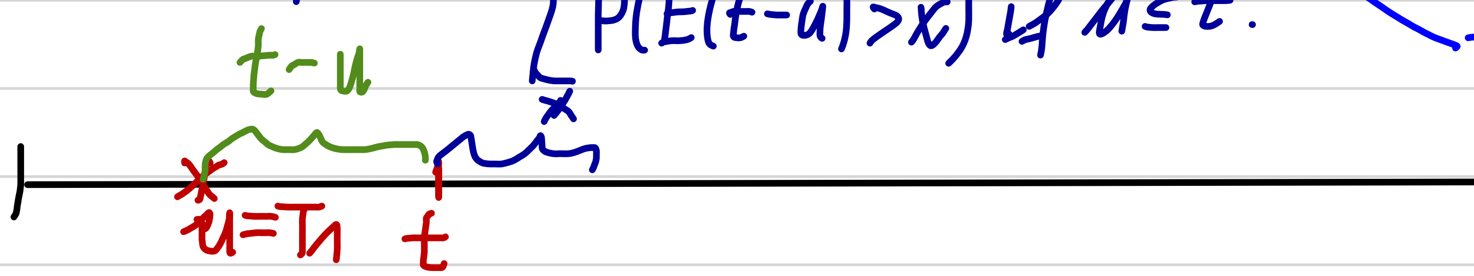
$$(*)\quad \boxed{\mathbb{P}(E(t)>x) = e^{-\lambda(t+x)} + \int_0^t \mathbb{P}(E(t-u)>x)\cdot \lambda e^{-\lambda u}\,du}$$

<u>Bizonyítás</u>: Alapötlet: feltételezés T_1-re!

$$\mathbb{P}(E(t)>x \mid T_1=u) = \begin{cases} 1 & \text{ha } u>t+x \\ 0 & \text{ha } t<u\le t+x \\ P(E(t-u)>x) & \text{if } u\le t. \end{cases}$$

triviális





$$\mathbb{P}(E(t)>x)=\int_{u=0}^{\infty}\mathbb{P}(E(t)>x \mid T_1=u)\,\lambda e^{-\lambda u}\,du$$

$$=\int_{u=0}^{t}\mathbb{P}(E(t-u)>x)\,\lambda e^{-\lambda u}\,du+\underbrace{\int_{u=t}^{t+x}0\cdot\lambda e^{-\lambda u}\,du}_{0}+\underbrace{\int_{u=t+1}^{\infty}1\cdot\lambda e^{-\lambda u}\,du}_{e^{-\lambda(t+x)}}$$

Most adunk egy megoldást a renewal elmélet nélkül majd azzal. Innen a Laplace transzformálttal megyünk tovább ezért átismételjük azt.

Laplace transzormált (ismétlés)

Legyen X egy nem negatív folytonos r.v. és mondjuk f az X sűrűség függvénye. Ekkor a Laplace transzformált: $\psi_X(s):=\int_{u=0}^{\infty}e^{-su}\cdot f(u)\,du=\mathbb{E}\left[e^{-sX}\right]$.

Általában: Legyen f egy olyan fv. amely lokálisan integrálható a $[0,\infty)$-en.

$$\mathcal{L}\{f\}(s):=\int_{u=0}^{\infty}e^{-su}\cdot f(u)\,du.$$

Az inverz Laplace transzformáltat $\mathcal{L}^{-1}$-el jelöljü

Mivel itt a pozitív félegyenesen dolgozunk ezért:

$$(f*g)(t):=\int_{\tau=0}^{t}f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau.$$

Továbbiakban $u(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{if } t = 0 \\ 1 & \text{if } t > 0 \end{cases}$

Heaviside fv.

Legyenek: $f(t) := \mathcal{L}^{-1}(F(s))$ & $g(t) := \mathcal{L}^{-1}(g(t))$ ekkor:

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{L}(f') = s \cdot F(s) - f(0), \quad \mathcal{L}(f * g)(s) = F(s) \cdot G(s) \\ \mathcal{L}(u(t)) = \frac{1}{s};\ \mathcal{L}(e^{-\alpha t} \cdot u(t)) = \frac{1}{s+\alpha} \end{array}}$$

$(**)$.

Most visszatérünk a fenti feladat diszkutálására: Fent $(*)$ egyenletben igazoltuk, hogy:
ha rögzített x-re

$$\varphi(t) := \varphi_x(t) := \mathbb{P}(E(t) > x) \text{ és } \psi(t) := \lambda e^{-\lambda t}$$

akkor:

$(***)$ $$\boxed{\varphi(t) = e^{-\lambda x} \cdot e^{-\lambda t} + (\varphi * \psi)(t)}$$

Most alkalmazzuk a Laplace transzformáltat mind a két oldalra & alkalmazzuk a $(**)$ tulajdonságokat:

$$\boxed{\mathcal{L}\{\varphi\}(s) = e^{-\lambda x} \cdot \frac{1}{s+\lambda} + \mathcal{L}\{\varphi\}(s) \cdot \mathcal{L}\{\psi\}(s)}$$

innen:

$$\mathcal{L}\{\varphi\}(s) = e^{-\lambda x}\cdot\frac{1}{s+\lambda}\cdot\frac{1}{\underbrace{1-\mathcal{L}\{\psi\}(s)}_{\frac{s}{s+\lambda}}}$$

$$\mathcal{L}\{\varphi\}(s) = e^{-\lambda x}\cdot\frac{1}{s+\lambda}\cdot\frac{s+\lambda}{s} = \frac{1}{s}\cdot e^{-\lambda x}.$$

Megint a (**) tulajdonságokból kapjuk:

$$\underline{\varphi(t) = \mathbb{P}(E(t)>x) = e^{-\lambda x}.}$$

Vegyük észre ezt a definícióból azonnal megkaphattuk volna. Miért?

Megoldás a Renewal elmélet segítségével:

Tehát a (***) egyenletet tekintjük, ami

$$\varphi(t) := \varphi_x(t) := \mathbb{P}(E(t)>x) \quad \text{és} \quad \psi(t) := \lambda e^{-\lambda t}$$

akkor:

$$(***) \qquad \boxed{\varphi(t) = e^{-\lambda x}\cdot e^{-\lambda t} + (\varphi * \psi)(t)}$$

Ebben az esetben $M(t) = \lambda t$. Tehát $M'(t) \equiv \lambda$. Vagyis

$$\varphi(t) = \underbrace{e^{-\lambda(t+x)}}_{a(t)} + \int_{\tau=0}^{t} \underbrace{e^{-\lambda(t-\tau+x)}}_{a(t-\tau)} \cdot \underbrace{\lambda}_{M'(\tau)}\, d\tau$$

Innen integrálással adódik, hogy $\varphi(t) \equiv e^{-\lambda x}$.