9. hf. 6-os példa

6. (*Yule folyamat*) Egy petricsészében $t = 0$-kor van egy amőba. Egy amőba Exp(1) idő elteltével ketté osztódik és lesz belőle két ugyanolyan amőba mint az eredeti. Lássa be, hogy a Petri csészében lévő amőbák $X(t)$ száma $\mathrm{Geo}(\mathrm{e}^{-t})$ eloszlású (az a fajta geometriai, amikor nem csak a kudarcokat, hanem a sikeres próbálkozást is beszámítjuk.) Vagyis lássuk be, hogy $\mathbb{P}(X(t) = k) = \left(1 - \mathrm{e}^{-t}\right)^{k-1} \mathrm{e}^{-t}$. Lássuk ezt be két féleképpen:

   (a) Először lássa be úgy, hogy felírjuk az $X(t)$ infinitizimális generátorát és ellenőrzi, hogy az amőbák eloszlásának időbeli fejlődésére felírt differenciálegyenlet rendszert és a $\mu_k(0) = \delta_{k,1}$ kezdeti feltételt valóban kielégítik a $\mu_k(t) = \left(1 - \mathrm{e}^{-t}\right)^{k-1} \mathrm{e}^{-t}$ függvények.

   (b) Másodszor lássa be annak felhasználásával hogy, ha $U_1, \ldots, U_n$ független és Exp(1) eloszlású válozók, akkor $\max\{U_1, \ldots, U_n\}$ ugyanolyan eloszlású, mint a $V_1 + \cdots + V_n$ független összeg, ahol $V_i \sim \mathrm{Exp}(i)$.

Vegyük észre, hogy $\lambda_n = n$ Vagyis $q(n, n+1) = \lambda_n = n$

$$Q = \begin{array}{c|l} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & \cdots \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & 0 & \cdots \\ & \vdots & & & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

Forward egyenlet: $\frac{d}{dt} P_t = P_t \cdot Q \Rightarrow$

$$(*) \quad \boxed{p_t'(i,j) = (j-1) \cdot p_t(i,j) - j\, p_t(i,j), \quad i \leq j, \quad p_0(i,j) = \delta_{i,j}.}$$

Legyen $G_1(s,t) := \sum_j p_t(1,j) s^j$ a generátor fv. az $X(t)$-re, feltéve, hogy $X(0) = 1$.

Szorozzunk be a $(*)$ d.e. mind két oldalán s^j-el kösszegezzünk j:re:

$$(**) \quad \boxed{\frac{\partial G_1(s,t)}{\partial t} = \lambda s^2 \frac{\partial G_1(s,t)}{\partial s} - \lambda s \frac{\partial G_1}{\partial s}; \quad G_1(s,0) = s.}$$

Innen: $G_1(s,t) = g\left(e^t\left(1-\frac{1}{s}\right)\right)$ valamely egyenlőre ismeretleng fv-re. A premfeltételből:

$g\left(1-\frac{1}{s}\right) = s$. Tehát $g(u) = \frac{1}{1-u}$. Kapjuk

$$G_1(s,t) = \frac{1}{1-e^t(1-s^{-1})} = \frac{s \cdot e^{-t}}{1-s(1-e^{-t})}.$$

Innen az s^j együtthatója:

$$P_t(i,j) = e^{-t}(1-e^{-t})^{j-1}, \quad j \geq 1.$$

(b) Független $Exp(1)$-ek maximumának sűrűség fv-e:

$$f_{(n)}(u) = n F^{n-1}(u) \cdot f(u) = n(1-e^{-u})^{n} \cdot e^{-u}.$$

Ha $X_1, \dots, X_n$ független és a CDF-e F & sűrűség fv-e f akkor a maximum sűrűség fv-e:

$$f_{(n)}(u) = n F^{n-1}(u) \cdot f(u)$$

A minimum sűrűség fv-e: $f_{(1)}(u) = n(1-F(u))^{n-1} \cdot f(u)$.