Segédanyag az A3 tárgy gyakorlatához

Sáfár Orsolya

1 Szeparábilis differenciálegyenletek

A megoldásról általában:

A szeparábilis differenciálegyenlet álatlános alakja:

$$y'(x) = f(x)g(y).$$

Ebben az esetben $g(y)$-al (feltéve, hogy $g(y) \neq 0$, különben esetvizsgálat szükséges) átosztva, majd dx-el szorozva kapjuk:

$$\frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx.$$

Mindkét oldalt integrálva (vigyázat, a baloldalt y, a jobboldalt x szerint), kapunk egy

$$G(y) = F(x) + C$$

alakú implicit összefüggést y-ra és x-re. Ebből sajnos nem mindig fejezhető ki y x függvényében. Ha a kezdeti feltétel adott ($y(x_0) = y_0$), akkor a C konstans helyettesítéssel meghatározható.

Kidolgozott mintapélda:

$$yy' = x^2y + 4y - x^2 - 4$$
$$yy' = (x^2 + 4)(y - 1)$$
$$\frac{y}{y-1}y' = x^2 + 4$$

Ha $y = 1$, akkor az $y \equiv 1$ megoldás (egyensúlyi helyzet), különben átoszthatunk vele:

$$\int \frac{y}{y-1}dy = \int x^2 + 4dx$$
$$\int 1 + \frac{1}{y-1}dy = \int x^2 + 4dx$$
$$y + \ln(y) = \frac{x^3}{x} + 4x + C$$

További gyakorlófeladatok, végeredménnyel:

$$xy' + y = 2 \qquad \left(y = 2 - \frac{C}{x}\right)$$

$$x^2(1-y)y' + y^2 + xy^2 = 0 \qquad \left(\ln\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{x+y}{xy} = C\right)$$

2 Szeparábilisra visszavezethető differenciálegyenletek

A megoldásról általában: A tipikus példa az

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

és az

$$y' = f(ax + by + c)$$

alakú egyenletek. Ekkor az

$$u(x) = \frac{y}{x},$$

illetve az

$$u(x) = ax + by + c$$

helyettesítésekkel a differenciálegyenlet visszavezethető a szeparábilis esetre, de létezhet más alakú célszerű helyettesítés is. Ha az y ismeretlen függvény helyett bevezettük az új u függvényt, akkor az y'-t is ki kell fejeznünk u segítségével.

Kidolgozott mintapélda:

$$y' = \tan(y - x)$$

Ebben az esetben az $u(x) = y - x$ helyettesítést célszerű használnunk

$$u(x) = y - x \to y = u + x \to y' = u' + 1$$

Az u-ra vonatkozó differenciálegyenlet ezek alapján:

$$u' + 1 = \tan(u)$$

$$u' = \tan(u) - 1$$

Feltéve, hogy $\tan(u) \neq 1$

$$\frac{1}{\tan(u) - 1} du = 1dx$$

$$\int \frac{1}{\tan(u) - 1} du = \int 1dx$$

Az integrál kiszámításához célszerű a $\tan(u)$-t v-vel helyettesíteni (itt $v \neq 1$). Ekkor

$$\tan(u) = v \to u = \arctan(v) \to 1 = \frac{1}{1 + v^2}\frac{dv}{du} \to du = \frac{1}{1 + v^2} dv$$

Ezek alapján az integrál az új változóval:

$$\int \frac{1}{v - 1}\frac{1}{v^2 + 1} dv = \int 1dx$$

Ezt az integrált parciális törtekre bontással tudjuk meghatározni:

$$\frac{1}{v - 1}\frac{1}{v^2 + 1} = \frac{A}{v - 1} + \frac{Bv + C}{v^2 + 1}$$

Ebből az egyenletből közös nevezőre hozással, majd a v^2, v és konstanstag együtthatóinak összehasonlításával adódik: $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = -\frac{1}{2}$. Ezek alapján az integrál:

$$\int \frac{1}{2}\frac{1}{v-1} - \frac{1}{2}\frac{v+1}{v^2+1} dv = \int 1 dx$$

$$\int \frac{1}{2}\frac{1}{v-1} - \frac{1}{4}\frac{2v}{v^2+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{v^2+1} dv = \int 1 dx$$

$$\frac{1}{2}\ln(v-1) - \frac{1}{4}\ln(v^2+1) - \frac{1}{2}\arctan(v) = x + C$$

Visszahelyettesítve u-t:

$$\frac{1}{2}\ln(\tan(u)-1) - \frac{1}{4}\ln(\tan(u)^2+1) - \frac{1}{2}u = x + C$$

Visszahelyettesítve y-t:

$$\frac{1}{2}\ln(\tan(y-x)-1) - \frac{1}{4}\ln(\tan(y-x)^2+1) - \frac{1}{2}(y-x) = x + C$$

További gyakorlófeladatok, végeredménnyel:

$$y' = ax + by + c \quad (\ln(abx + b^2y + bc + a) = bx + C)$$

$$3y' = 3(4x+3y-2)^2 - (4x+3y+4) \quad \left(\frac{4x+3y-3}{12x+9y-4} = ce^{5x}\right)$$

3 Egzakt differenciálegyenletek

A megoldásról általában Az egzakt differenciálegyenlet általános alakja:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \text{ahol } M'_y = N'_x$$

Ekkor található egy $F(x,y) \equiv c$ potenciálfüggvény, amely egy implicit összefüggést szolgáltat x-re és y-ra. Ezen $F(x,y)$ a differenciálegyenletből a következőképpen határozható meg:

$$F(x,y) = \int N(x,y)dy + \int M(x,y) - \left(\int N'_x dy\right) dx$$

Kidolgozott mintapélda

$$(x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy = 0$$

- Először ellenőriznünk kell, hogy valóban egzakt egyenletről van-e szó:

  $$N'_x = (x^2 - 2xy - y^2)'_x = 2x - 2y$$

  $$M'_y = (x^2 + 2xy - y^2)'_y = 2x - 2y,$$

  azaz az egyenlet valóban egzakt.

- Meghatározzuk a potenciálfüggvényt:

$$c = F(x,y) = \int N(x,y)dy + \int M(x,y) - \left(\int N'_x dy\right) dx =$$

$$\int x^2 - 2xy - y^2 dy + \int x^2 + 2xy - y^2 - \left(\int 2x - 2ydy\right) dx =$$

$$x^2y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + \frac{x^3}{3} + x^2y - xy^2 - x^2y + xy^2 = x^2y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + \frac{x^3}{3}$$

További gyakorlófeladatok végeredménnyel

$$x^2ye^{y^2}dy + xe^{y^2}dx = 0 \qquad \left(c = \frac{1}{2}x^2e^{y^2}\right)$$

4 Egzaktra visszavezethető differenciálegyenletek

A megoldásról általában Bizonyos egyenletek egy (integráló tényezőnek nevezett) p függvénnyel beszorással visszavezethetőek egzakttá. Legyen a differenciálegyenlet most is

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

alalkú, $r := M'_y - N'_x$. Ha

$$\frac{r(x,y)}{N(x,y)} \text{ csak x-től függ, akkor } p = e^{\int \frac{r}{N}(x)}dx,$$

vagy ha

$$\frac{r(x,y)}{M(x,y)} \text{ csak y-től függ, akkor } p = e^{-\int \frac{r}{M}(y)}dy.$$

Ezen p függvénnyel beszorozva az eredeti egyenletet egzakttá válik.

Kidolgozott mintapélda

$$ydx - xdy = 0$$

$$r = M'_y - N'_x = 1 - (-1) = 2$$

Ebben az esetben mindkét feltétel teljesül, válasszuk most az

$$p = e^{\int \frac{r(x,y)}{N(x,y)}dx} = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2ln(x)} = \frac{1}{x^2}$$

esetet. Ekkor az egyenletet $\frac{1}{x^2}$-el beszorozva:

$$\frac{y}{x^2}dx - \frac{1}{x}dy = 0$$

Ez már valóban egzakt, mert:

$$\left(\frac{y}{x^2}\right)'_y = \frac{1}{x^2}$$

$$\left(-\frac{1}{x}\right)'_x = \frac{1}{x^2}.$$

Már csak a potenciálfüggvényt kell meghatároznunk:

$$F(x,y) = \int -\frac{x}{y^2}dy + \int \frac{1}{y}dx - \int\int -\frac{1}{y^2}dydx = \frac{x}{y} + \frac{x}{y} - \frac{x}{y} = \frac{x}{y} = c$$

További gyakorlófeladatok végeredménnyel

$$xy\cos(y)y' + y = 0 \qquad \left(c = xe^{\sin(y)}\right)$$

5 A szukcesszív approximáció

A megoldásról általában. Most csak elsőrendű egyenletről lesz szó, de a módszer általánosítható magasabbrendű esetre is. Az elsőrendű differenciálegyenlet általános alakja:

$$y'(x) = F(x,y)$$

$$y(x_0) = y_0 \qquad x_0, y_0 \in \mathbb{R}$$

Ekkor a megoldás keresése szukcesszív approximációval valójában egy függvénysorozat meghatározása, amely függvénysorozat határfüggvénye lesz a megoldás. Induljunk ki a kezdeti feltételből,

$$y_0(x) \equiv y_0$$

Ezután a sorozat következő elemét az alábbi képlettel kapjuk:

$$y_{i+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(x, y_i(x))\mathrm{d}x \qquad i \in \mathbb{N}$$

Ekkor a

$$\lim_{i\to\infty} y_i(x)$$

függvény egyenlő a megoldással. Ezen határértéket viszont nem biztos, hogy meg kell (lehet) határozni. Ha csak közelítő megoldásra van szükség, akkor megelégszünk a sorozat első néhány tagjával (amelyből a legutolsó a közelítő megoldás).

Kidolgozott mintapélda Tekintsük az alábbi differenciálegyenletet:

$$y'(x) = y$$

$$y(0) = 1$$

$y_0 = 1$ miatt

$$y_0(x) \equiv 1$$
$$y_1(x) = y_0 + \int_0^x y_0(x)\mathrm{d}x = 1 + \int_0^x 1\mathrm{d}x = 1 + x$$
$$y_2(x) = y_0 + \int_0^x y_1(x)\mathrm{d}x = 1 + \int_0^x 1 + x\mathrm{d}x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$
$$y_3(x) = y_0 + \int_0^x y_2(x)\mathrm{d}x = 1 + \int_0^x 1 + x + \frac{x^2}{2}\mathrm{d}x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3}$$
$$y_4(x) = y_0 + \int_0^x y_3(x)\mathrm{d}x = 1 + \int_0^x 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3}\mathrm{d}x =$$
$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

Ekkor ezen $y_4(x)$ például egy jó közelítő megoldása a differenciálegyenletnek. Ebben az esetben viszont teljes indukcióval bizonyítható, hogy

$$y_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$$

Ha $n \to \infty$ akkor az adódó végtelen sorösszeg éppen az e^x függvény 0 körüli Taylor sora (Maclaurin sora), ami a pontos megoldás.

További gyakorlófeladatok végeredménnyel Szukcesszív approximációval adjuk meg a következő feladat közelítő megoldását $n = 4$-re.

$$y'(x) = 2xy - 2x^2 + 1, \quad y(0) = 2 \qquad \left(y_4 = 2 + x + 2x^2 + x^4 + \frac{x^6}{3} + \frac{x^8}{12} - \frac{16x^9}{945} \right)$$

6 Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

A megoldásról általában Az általános lineáris elsőrendű differenciálegyenlet

$$y' + f(x)y = g(x)$$

alakú. Létezik megoldóképlet ezen egyenlettípusra, de mi ezzel most nem foglalkozunk, helyette olyan megoldási módszert írok le, ami később is hasznos lesz. A megoldást három részletben végezzük:

- A homogén egyenlet általános megoldása: $y' + f(x)y = 0$-t hívjuk az egyenlet homogén részének. Először ezt oldjuk meg. Mivel szeparábilis, így az első fejezetben ismertetett módszerrel kapjuk:

  $$y_{ha} = ce^{F(x)},$$

  ahol $F(x) = \int -f(x)dx$, $c \in \mathbb{R}$.

- Inhomogén egyenlet partikuláris megoldása: két módszert tanultunk. Az első az állandók variálása, a második a próbafüggvények módszere.

  Inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának keresése az állandók variálásával:

Írjuk fel a keresett megoldást $y_p = c(x)e^{F(x)}$ alakban, (általánosabban: tegyük fel, hogy az összes paraméter x-től függ) majd behelyettesítéssel határozzuk meg $c(x)$-et. Jelen esetben

$$y_p' - f(x)y_p = g(x) \rightarrow$$

$$(c'(x)e^{F(x)} + c(x)e^{F(x)}(-f(x))) + f(x)c(x)e^{F(x)} = g(x) \rightarrow$$

$$c'(x) = \frac{g(x)}{e^{F(x)}},$$

Ebből a $c(x)$ egy integrálással meghatározható.

Inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának keresése próbafüggvényekkel:

Ez a módszer akkor használható, ha a $g(x)$ függvény $\sin(x), \cos(x), e^x$, polinom, vagy ezek lineáris kombinációja. Legyen $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans, k pedig a differenciálegyenlet rendje (ebben a fejezetben 1, egyébként a legmagasabb egyenletben szereplő derivált határozza meg). Tegyük fel továbbá, hogy $g(x)$ lineárisan független a homogén általános megoldásától (megoldásaitól, ha magasabb rendű differenciálegyenletet tekintek). A lenti táblázatban szerepel néhány $g(x)$ függvényre a megfelelő próbafüggvény.

$g(x)$	Próbafüggvény
$\sin(ax)$	$A\sin(ax) + B\cos(ax)$
$\cos(ax)$	$A\sin(ax) + B\cos(ax)$
e^{ax}	Ae^{ax}
n-edfokú polinom	általános $n+k$-ad fokú polinom
$x\sin(ax)$	$Ax\sin(ax) + B\sin(ax) + Cx\cos(ax) + D\cos(ax)$
$x\cos(ax)$	$Ax\sin(ax) + B\sin(ax) + Cx\cos(ax) + D\cos(ax)$
xe^{ax}	$Axe^{x} + Be^{x}$

Ha $g(x)$ és a homogén egyenlet megoldása lineárisan összefüggő (ezt hívjuk rezonanciának), akkor a felsorolt próbafüggvényeket be kell szorozni egy általános m-edfokú polinommal, ahol m a legkisebb olyan egész, amelyre a próbafüggvény lineárisan független a homogén egyenlet megoldásától.

Az fent részletezett próbafüggvényt visszahelyettesítve az inhomogén egyenletbe, megkapjuk az ismeretlen $A, B, \ldots$ konstansokat.

- Az inhomogén egyenlet általános megoldása = homogén egyenlet általános megoldása + inhomogén egyenlet partikuláris megoldása, azaz:

$$y_{iha} = y_{ha} + y_p$$

Ez sokkal általánosabban is igaz, minden lineáris egyenletre (pl. nem feltétlen differenciálegyenletekre).

Kidolgozott mintapélda

$$y' + 2xy = -xe^{-x^2}$$

- *Homogén rész megoldása*
$$y' + 2xy = 0$$
$$y' = -2xy$$
Ha $y = 0$, akkor az $y \equiv 0$ megoldás (egyensúlyi helyzet). Ha $y \neq 0$, akkor átosztva vele:
$$\int \frac{1}{y} dy = -\int -2x dx$$
$$ln|y| = -x^2 + c, \text{ ahol } c \in \mathbb{R} \text{ tetszőleges}$$
$$|y| = e^{-x^2} e^c = e^{-x^2} K \text{ ahol } K \in \mathbb{R}^+ \text{ tetszőleges}$$
Összevetve a lehetséges eseteket azt kapjuk, hogy
$$y_{ha} = Ce^{-x^2} \text{ ahol } C \in \mathbb{R} \text{ tetszőleges}$$

- *Inhomogén rész megoldása állandók variálásával*:
$$y_p = C(x)e^{-x^2}$$
Behelyettesítve az egyenletbe:
$$C'(x)e^{-x^2} + C(x)e^{-x^2}(-2x) + 2xC(x)e^{-x^2} = -xe^{-x^2} \rightarrow$$
$$C'(x) = -x \rightarrow C(x) = -\frac{x^2}{2}$$
Így a keresett partikuláris megoldás:
$$y_p = -\frac{x^2}{2} e^{-x^2}$$

- *Inhomogén rész megoldása próbafüggvényel*: Mivel a homogén rész megoldása lineárisan független $g(x) = xe^{-x^2}$-től, ezért a megfelelő próbafüggvény:
$$y_p = Ax^2 e^{-x^2} + Bxe^{-x^2}.$$
Az egyenletbe behelyettesítve kapjuk: $A = -\frac{1}{2}, B = 0$, így a keresett partikuláris megoldás:
$$y_p = -\frac{x^2}{2} e^{-x^2}$$

- *Inhomogén egyenlet általános megoldása*
$$y_{iha} = y_{ha} + y_p$$
alapján:
$$y_{iha} = Ce^{-x^2} - \frac{x^2}{2} e^{-x^2}, \text{ ahol } C \in \mathbb{R} \text{ tetszőleges}$$

További gyakorlófeladatok végeredménnyel:
$$y' \sin(x) + cos(x) = 1 + y \quad \left(y = (x + c) \tan\left(\frac{x}{2}\right) \right)$$
$$y' + y = sin2x \left(y = ce^{-x} + \frac{1}{5} \sin(2x) - \frac{2}{5} \cos(2x) \right)$$

7 Magasabb rendű állandó együtthatós differenciálegyenlet

A megoldásról általában. Ha $\sum_{n=0}^{N} a_n \cdot y^{(n)} = f(x)$ alakú az egyenlet, ahol $a_N \neq 0, a_i \in \mathbb{R}$, akkor N-edrendű állandó együtthatós differenciálegyenletről beszélünk. A megoldás itt is három lépésből áll.

Homogén egyenlet megoldása: a differenciálegyenlet homogén részéhez tartozó karakterisztikus egyenlet ($\sum a_n \lambda^n = 0$) segítségével. Legyenek az egyenlet gyökei $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$. Ha csupa különböző valós gyöke van, akkor a homogén általános megoldás

$$y_H = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + c_N e^{\lambda_N x}$$

alakú.

Ha többszörös gyök van, pl. λ_1 többszörös gyök, akkor az összegben a megfelelő részletet ki kell cserélni $c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x} + c_3 x^2 e^{\lambda_1 x} + \ldots$-ra, ahol annyi tagot kell venni, ahányszoros gyök λ_1. Ezt hívják belső rezonanciának.

Ha komplex gyökpár is szerepel a gyökök között, pl. $\alpha \pm i\beta$, akkor a megfelelő részletet ki kell cserélni $c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$-re.

Inhomogén partikuláris megoldás:

- Próbafüggvény módszerrel: hasonló az elsőrendűhöz.
- állandók variálása: ha a partikuláris megoldást

  $$y_p = \sum_{i=1}^{N} c_i(x) y_i(x)$$

  alkaban keressük, ahol $y_i = e^{\lambda_i} x$, vagy esetleg annak módosítottja, akkor a keresett $c_i(x)$-ekre teljesül, hogy:

  $$\begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \\ \vdots \\ c_N' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_N \\ Y_1' & Y_2' & \cdots & Y_N' \\ \vdots & & & \\ Y_1^{(N-1)} & Y_2^{(N-1)} & \cdots & Y_N^{(N-1)} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{bmatrix},$$

  amelyből integrálással kapunk egy partikuláris megoldást.
- Az inhomogén általános megoldás ebben az esetben is a homogén általános megoldás és az inhomogén partikuláris megoldás összege.

Mintapélda. $y'' + 2y' - 3y = e^{-3x}$

Homogén megoldás: a karakterisztikus egyenlet $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$, innen $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3$, a homogén megoldás $c_1 e^{x} + c_2 e^{-3x}$.

Inhomogén egyenlet megoldása:

- Próbafüggvény módszerrel. Rezonancia van, így a próbafüggvény legyen Bxe^{-3x} alakú.

$$\begin{aligned}
y_p &= Bxe^{-3x} \\
y_p' &= Be^{-3x} + Bx \cdot (-3) \cdot e^{-3x} \\
y_p'' &= (-3)Be^{-3x} + B \cdot (-3) \cdot e^{-3x} + Bx \cdot 9 \cdot e^{-3x}
\end{aligned}$$

Ezeket beírva az eredeti egyenletbe, összehasonlítjuk xe^{-3x} és e^{-3x} együtthatóját a két oldalon és ebből számoljuk ki B értékét.

$$\begin{aligned}
xe^{-3x} &: -3B - 6B + 9B = 0 \\
e^{-3x} &: 2B - 3B - 3B = 1
\end{aligned}$$

Az első egyenlet kiesik, a másodikból pedig $B = -\frac{1}{4}$, és így $y_p = \frac{1}{4}xe^{-3x}$.

- állandók variálásával. A megoldást $c_1(x)e^x + c_2(x)e^{-3x}$ alakban keressük.

$$\begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^x & e^{-3x} \\ e^x & -3e^{-3x} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-3x} \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{-4e^{-2x}} \begin{bmatrix} -3e^{-3x} & -e^{-3x} \\ -e^x & e^x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-3x} \end{bmatrix} = \frac{1}{-4e^{-2x}} \begin{bmatrix} -e^{-6x} \\ e^{-2x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}e^{-4x} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Innen $c_1 = -\frac{e^{-4x}}{16}$ és $c_2 = -\frac{1}{4}x$, és a partikuláris megoldás $-\frac{e^{-3x}}{16} - \frac{1}{4}xe^{-3x}$. Mivel a homogén megoldásban szerepel c_1e^{-3x}, ezért az első tag igazából beolvasztható abba.

8 Állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet rendszer

A megoldásról általában: A homogén egyenlet általános alakja:

$$x'(t) = Ax(t),$$

ahol x az ismeretlen $x_1(t), x_2(t), \ldots$ függvényekből álló vektor, A pedig egy valós számokból álló $n \times n$-es mátrix. Az egyenlet általános megoldásához meg kell határoznunk A sajátértékeit $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ és hozzájuk tartozó sajátvektorokat $(v_1, v_2, \ldots)$. Ekkor a megoldás az alábbi alakban áll elő:

$$y_H = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i e^{\lambda_i t}, \quad \text{ahol } c_i \in \mathbb{R}$$

ha λ_i mind különböző valós. Különben a magasabb rendű differenciálegyenleteknél tárgyalt módon $e^{\lambda_i t}$-t megváltoztatni (pl. komplex gyökpár$(=\alpha + i\beta)$ esetén $c_1v_1e^{\alpha t}\sin(\beta t) + c_2v_2e^{\alpha t}\cos(\beta t)$).

Kidolgozott mintapélda:

$$x_1' = x_1 + 3x_2$$

$$x_2' = 3x_1 + x_2$$

Ekkor az A mátrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ezen mátrix sajátértékei:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda+2)(\lambda-4),$$

Azaz a két sajátérték: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$.
A 4-hez tartozó sajátvektor:

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

egyenletből határozható meg, itt $(s_1, s_2) = (1,1)$,
A -2-höz tartozó sajátvektor pedig:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

alapján az (1,-1). Így a homogén egyenlet általános megoldása:

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t}.$$

9 Differenciálegyenletek megoldása Laplace-transzformációval

A Laplace-transzformációról általában: Legyen $f(x)$ egy szakaszonként folytonos függvény, amelyre $|f(x)| \leq Me^{ax}$. Ekkor az

$$L_f(p) = \int_0^\infty f(x)e^{-px}dx$$

improprius integrál konvergens $(0,\infty)$-n. Ezt az integrált nevezzük az $f(x)$ függvény Laplace-transzformáltjának. Az alábbi nevezetes függvények Laplace-transzformáltjait kell mindenképpen ismernünk:

x^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\cos(ax)$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
$\sin(ax)$	$\frac{a}{p^2+a^2}$
e^{ax}	$\frac{1}{p-a}$
$\sinh(ax)$	$\frac{a}{p^2-a^2}$
$\cosh(ax)$	$\frac{p}{p^2-a^2}$
xe^{ax}	$\frac{1}{(p-a)^2}$
$e^{ax}\sin(bx)$	$\frac{b}{(p-a)^2+b^2}$
$e^{ax}\cos(bx)$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+b^2}$

Továbbá fontos szabály a függvény deriváltjainak Laplace-transzformáltja:

$$L_{f^{(n)}}(p) = p^n L_f(p) - \sum_{i=0}^{n-1} p^{n-1-k} f^{(k)}(0),$$

speciális esetben a függvény első deriváltjának Laplace-transzformáltja:

$$L_{f'}(p) = pL_f(p) - f(0)$$

Ezek ismeretében bármely differenciálegyenlet vagy rendszer átírható a Laplace-transzformáltakat ismeretlenként tartalmazó algebrai egyenletté. Inverz Laplace-transzformációval pedig megoldhatjuk egy eredeti egyenletet.

Kidolgozott mintapélda:

$$y'' - 10y' + 25y = e^{-3x} \quad y'(0) = 0 \quad y(0) = \frac{1}{25}$$

Jelöljük az ismeretlen y függvény Laplace-transzformáltját Y-al. Ekkor:

$$p^2Y - p\frac{1}{25} - 10pY + 25Y = \frac{1}{p+3}$$

$$Y(p^2 - 10p + 25) = \frac{1}{p+3} + \frac{1}{25}p - \frac{10}{25}$$

$$Y(p-5)^2 = \frac{p^2 - 7p - 5}{25(p+3)}$$

$$Y = \frac{p^2 - 7p - 5}{25(p+3)(p-5)^2}$$

Innen parciális törtekre bontással kapjuk:

$$Y = \frac{39}{1600}\frac{1}{p-5} - \frac{3}{40}\frac{1}{(p-5)^2} + \frac{1}{64}\frac{1}{s+3}$$

Ezt a kifejezést kell inverz Laplace-transzformálni, azaz keressük azon függvényeket, amelynek ezek a Laplace-transzformáltjai, így kapjuk:

$$y = \frac{39}{1600}e^{5x} - \frac{3}{40}xe^{5x} + \frac{1}{64}e^{-3x}.$$

További gyakorlófeladatok, végeredménnyel

$$y" - 2y' + y = -1y(0) = 2y'(0) = 3 \quad \big(y = e^{2x}(1+x)) - 1\big)$$