Kooperatív játékelmélet alkalmazása nem teljes szerződésekben

Diplomamunka

Írta: Németh Tibor

Alkalmazott matematikus szak

Témavezető:

Pintér Miklós, egyetemi docens
Matematika Tanszék
Budapesti Corvinus Egyetem, Közgazdaságtudományi Kar

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Természettudományi Kar

2013

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **1**

2. Nem teljes szerződések **3**

3. TU-játékok **5**

4. NTU-játékok **11**

5. TUU-játékok **15**

5.1. A WS-mag, mint egy NTU-játék magja 18

6. Kiegyensúlyozott játékok **26**

6.1. Kiegyensúlyozottság 26

6.2. π-kiegyensúlyozottság 27

6.3. Π-kiegyensúlyozottság 35

7. Konklúzió **39**

1. fejezet

Bevezetés

A diplomamunka során kooperatív játékokról lesz szó, különböző speciális változataikkal együtt. Olyan játékokat vizsgálunk, melyekben bizonytalanság van, nem tudjuk pontosan, hogy a jövőben mi fog történni, de tudjuk, hogy milyen esemény (játék) mekkora valószínűséggel következik be.

A kooperatív játékokat két kategóriába sorolhatjuk aszerint, hogy a kifizetések tetszőlegesen átruházhatóak a játékosok között (TU-játékok), vagy sem (NTU-játékok). TU-játékok során van egy tetszőlegesen osztható elem (például pénz), melyet a játékosok tetszőlegesen átadhatnak egymásnak egy koalíción belül, és mindenkinek ugyanannyit ér. NTU-játékok esetén megadjuk, milyen kifizetések közül választhatnak.

A dolgozatban vizsgált probléma gazdasági alkalmazásai az idő folyamán folyamatosan erősödnek, egyik ilyen például az úgynevezett bankcsőd probléma (bankruptcy problem, Aumann és Maschler (1985)), mely a következő:

Ha egy bank csődbemegy, tehát nem tudja kifizetni az adósságait, akkor kérdés, hogyan ossza szét a vagyonát a hitelezői között úgy, hogy az minden fél számára „igazságos” legyen, ne tudjanak a szerződésbeli szétosztásnál jobb megoldást találni. Az adósságok, követelések összege meghaladja a szétosztásra szánt vagyont. A pontos jövőbeli vagyon nagysága nem egyértelmű, a körülményektől függően több értéket vehet fel. Több módszer is van, ami szerint szétoszthatjuk a vagyont. Kérdés, melyik az igazságos, melyik a jó, amire minden résztvevő igent mond? Minden módszernek van valami előnye a többivel szemben. A problémával Habis és Herings (2011) foglalkoztak, akik bevezették a TUU-játék fogalmát. A céljuk az volt, hogy stabil megoldásokat keressenek, melyektől a jelenben a jövőre tekintve (ex-ante), és a jövőbeli konkrét megvalósuláskor visszanézve (ex-post) se érje meg egyik félnek sem eltérnie. Ezekre az önkikényszerítő megoldásokra bevezették a Gyenge-Szekvenciális mag (WS-mag) fogalmat, az ismert megoldások közül kevés esik bele ebbe a halmazba. Ezt a WS-magot is fogjuk vizsgálni.

A cél szükséges és elégséges feltétel szolgáltatása a WS-mag nem ürességére. Elégséges feltételeket már ismerünk. Az új eredményeink: egy konstrukció, mellyel a WS-magnak egy másfajta játék magjával való ekvivalenciáját mutattuk be, ennek segítségével egy elégséges feltételre adott alternatív bizonyítás. Példákat adtunk, melyek igazolják, hogy ezek a feltételek nem magától értetődőek. Vizsgáltunk egy szükséges és elégséges feltételt, ám a tétel bizonyítása hibásnak bizonyult, a tétel állítására ellenpéldát nem sikerült konstruálnunk. Az első számú szerzővel konzultáltunk ezzel kapcsolatban, aki ezt a hiányosságot megerősítette.

2. fejezet

Nem teljes szerződések

A közgazdaságtanban a szerződéselmélet a gazdasági felek közti szerződések felépítését vizsgálja. Egy szerződést teljes szerződésnek hívunk, ha minden változót és paramétert számításba vesz, azok minden lehetséges értékét és változását figyelembe veszi. Teljes szerződések esetén a felek a szerződés végéig elkötelezik magukat a szerződésnek, aszerint cselekednek. A szerződés betartását törvény által ellenőrzik, azt megszegni, felbontani nem lehet, vagy csak nagy büntetés árán.

Ha valamely tulajdonság nem teljesül, akkor nem teljes szerződésről beszélünk. Ennek több oka lehet: túl sok kimenetel lehetséges, túl sok változó van, amiktől függ a szerződés, vagy a jövőben nem ellenőrizhetőek a körülmények. Ha valamilyen nem várt esemény következik be, akkor általános módszer, ha minden fél beleegyezik, hogy új szerződést írnak. A szerződések nem teljességének további okai is lehetnek, például, ha minden lehetséges kimenetelt számbavettünk, akkor is nehéz az eseményekhez valószínűségeket rendelni. A teljes- és nem teljes szerződések alapjairól Salanie (1997) írt.

A mi témánk azt az esetet nézi, ha a szerződést nem lehet erőszakosan betartatni törvény által, vagy túlságosan költséges, bonyolult lenne ellenőrizni. Ilyenkor a felek eltérhetnek a szerződéstől, ha az számukra nem kedvező fordulatot vesz. Olyan szerződéseket vizsgálunk, ahol a felek hosszú távú megegyezést kötnek, és a jövőben közös profitot szétosztják egymás között. Mivel a szerződést nem lehet betartatni a felekkel, és nem szeretnénk, hogy új szerződést kelljen íratni, így a cél egy szerződés mely során a felek végig együttműködnek.

Minden résztvevőről feltesszük, hogy racionális, így az együttműködéshez szükséges, hogy a szerződés önkikényszerítő legyen: a felek bármilyen módon a szerződésben foglaltaktól eltérve rosszabbul járjanak. A szerződés betartatására egy módszer, ha a felek a kölcsönösen egymásra vannak utalva, egymás nélkül nem tudnak profitot termelni, például megosztják a termelést, mindenki specializálódik valamilyen alkatrészre vagy gyártási

folyamatra. Ilyenkor is előfordulhat, ha nem megfelelő volt a szerződés, hogy valamely résztvévő kiszáll, és saját céget alapít például a többi résztvevők egy csoportjával, ezáltal megszűnteti az együttműködést. Az is kérdéses, hogy egyáltalán lehet-e ilyen önkikényszerítő szerződést íratni, vagy mindenképp lesz olyan esemény, amikor megszűnik az együttműködés. Ezen szerződések modellezésére, stabil szerződés keresésére, illetve annak létezésének ellenőrzésére szeretnénk a dolgozatban válaszokat találni a kooperatív játékelmélet alkalmazásával.

3. fejezet

TU-játékok

A fejezet során átruházható hasznosságú játékokról lesz szó, melyeket röviden TU-játékoknak hívunk, az angol kifejezés rövidítéseként kapták nevüket. A játékosok összefoghatnak egymással, koalíciókat alkothatnak, így más értéket érhetnek el, mint a a tagok külön-külön. A játékosokból álló halmazokat tehát koalícióknak hívjuk, az összes játékosból álló halmaz a nagykoalíció, a játékos nélküli halmaz az üreskoalíció. A játékosok ezekben a játékokban egy koalíción belül szabadon átruházhatják egymásnak az értékeiket. Először bevezetek jelöléseket, majd definiálom az ilyen játékokat:

Jelölések:

- $N = \{1, 2, ..., n\}$.
- $\mathcal{N}$ az N nemüres részhalmazai.
- $\chi_S \in \mathbb{R}^N, S \in \mathcal{N}$ jelölje a karakterisztikus vektort, melynek minden S-beli koordinátája 1, a többi 0.
- x^C az x vektor C-re vett vetületét, $C \subseteq N$, azaz:
  $x^C = \{y \in \mathbb{R}^C \mid y^i = x^i, i \in C\}$.
- $\mathbb{I}_{\{\cdot\}}$ jelöli az indikátorfüggvényt, azaz 1, ha a feltétel teljesül, 0 egyébként.
- $\mathbb{R}^{\mathcal{N}} = \{\lambda : S \in \mathcal{N} \to \lambda_S \in \mathbb{R}\}$.
- Δ_N jelölje az egységszimplexet:
  $\mathbb{R}^n$-en, $\Delta_N = \left\{x \in \mathbb{R}^n | x^i \geq 0 \ \forall i \in N, \ \sum_{i \in N} x^i = 1\right\}$.
- $\Delta_S = \left\{x \in \Delta_N | \sum_{i \in S} x^i = 1, \forall S \in \mathcal{N}\right\}$.
- Δ legyen a Δ_S halmazok $S \in \mathcal{N}$ feletti Descartes-szorzata.

- $\Delta_{\mathcal{N}}$ jelölje az egységszimplexet: $\mathbb{R}^{\mathcal{N}}$-en:
  $\Delta_{\mathcal{N}} = \left\{\lambda \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}, \mid \lambda_S \geq 0 \, \forall S \in \mathcal{N}, \sum_{S \in \mathcal{N}} \lambda_S = 1\right\}.$

  Legyen $x, y \in \mathbb{R}^N$,

- $x \geq y \Leftrightarrow x^i \geq y^i, i \in N,$

- $x > y \Leftrightarrow x \geq y$ és $x \neq y,$

- $x \gg y \Leftrightarrow x^i > y^i, i \in N.$

3.0.1. Definíció. *A játékosok nemüres, véges halmaza $N = \{1, 2, ..., n\}$, a v: $2^N \to \mathbb{R}$ függvény pedig minden $C \subseteq N$ koalícióhoz hozzárendeli a $v(C)$ értékét, a $v(\emptyset) = 0$ feltevéssel. Ekkor v egy TU-játék. A nemüres koalíciókat $\mathcal{N}$-nel jelöljük. Az N véges, nemüres játékoshalmazból álló TU-játékosztály jelölésére $\mathcal{G}^N$-t használjuk.*

Ezen játékok egy speciális osztálya a konvex TU-játékok:

3.0.2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $v \in \mathcal{G}^N$ TU-játék konvex, ha*

$$v(C) + v(T) \leq v(C \cup T) + v(C \cap T), \quad C, T \subseteq N.$$

Konvex TU-játék során tehát a v függvény szupermodularitását tesszük fel.

3.0.3. *Példa.* TU-játék: Legyen $v \in \mathcal{G}^N$ TU-játék, a három játékos három mezőgazdasági termelő, akik összefoghatnak egymással a közös termelés érdekében, szerszámokat, gépeket együttesen használhatják. Az alábbi táblázat az egyes koalíciókhoz tartozó értékeket tartalmazza:

	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
v	1	3	5	6	7	8	11

3.1. táblázat. A 3.0.3 példabeli TU-játék

Könnyen ellenőrizhető, hogy a játék konvex, például:

$$v(\{1,2\}) + v(\{1,3\}) = 1 + 7 \leq 1 + 11 = v(\{1\}) + v(\{1,2,3\}).$$

A következőkben a nagykoalícióhoz tartozó $v(N)$ értéket fogjuk szétosztani a játékosok között.

3.0.4. Definíció. *Jelölje $x^i \in \mathbb{R}$ az $i \in N$ játékos részesedését. A v játék egy lehetséges kimenetelét a játékosok kifizetéseit tartalmazó $x = (x^i)_{i \in N} \in \mathbb{R}^N$ vektorral jellemezzük, és kifizetésvektornak nevezzük.*

3.0.5. Definíció. *Egy x kifizetésvektor a C koalíció számára elérhető, ha*

$$\sum_{i \in C} x^i \leq v(C).$$

A nagykoalíció számára elérhető kifizetésekre a koalíciók általi elfogadhatóság szempontjából a következő fogalmakat vezethetjük be:

3.0.6. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a v játékban az $x = (x^i)_{i \in N}$ kifizetésvektor*

- *szétosztás, ha $\sum_{i \in N} x^i = v(N)$,*
- *elosztás, ha $\sum_{i \in N} x^i = v(N)$ és $x^i \geq v(\{i\}), i \in N$,*
- *magelosztás (vagy magbeli), ha $\sum_{i \in N} x^i = v(N)$ és $\sum_{i \in C} x^i \geq v(C), \quad C \subseteq N$.*

A v játék magját $Core(v)$-vel jelöljük. A magfogalmat Gillies (1959) vezette be.

Azaz szétosztásoknál pontosan a nagykoalícióhoz tartozó értéket osztottuk szét, elosztás olyan szétosztás, ahol minden játékos legalább annyit kapott, amennyit egyedül el tud érni, ezt egyéni racionalitásnak hívjuk. A magelosztás olyan szétosztás, ahol bármely $C \subseteq N$ részkoalíciót véve, a részkoalíció tagjai a szétosztásban együttesen legalább annyi kifizetést kaptak, mint a koalíció értéke. Ezt koalíciós racionalitásnak hívjuk.

Ha valamely részkoalícióra ez nem teljesülne, tehát ők együttesen több értéket tudnának elérni, akkor számukra ez a szétosztás nem lenne stabil: ezt a többletet egymás között szétosztva mindenki jobban járna. A mag tehát a szétosztások egy fontos osztályát alkotja, mely a játékosok számára stabil kimeneteleket tartalmazza.

A következőkben a magot egy más oldalról közelítem meg:

3.0.7. Definíció. *Vegyünk egy $v \in \mathcal{G}^N$ TU-játékot. Azt mondjuk, hogy az x kifizetésvektor blokkolja az y kifizetésvektort a $C \subseteq N$ koalíción keresztül, ha*

- *$\sum_{i \in C} x^i \leq v(C)$, azaz az x kifizetésvektor elérhető a C koalíció számára, és*
- *$x^i > y^i$, $i \in C$.*

Azaz a C koalíció tagjai az x kifizetésvektor esetén mindannyian jobban járnak, mint az y esetén. Ekkor y nyilvánvalóan nem stabil szétosztás, hiszen a C koalíció el tudja érni x-et, és az minden tagjának kedvezőbb.

3.0.8. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az x kifizetésvektor blokkolja az y kifizetésvektort, ha van olyan C koalíció, melyen keresztül blokkolja.*

3.0.9. Definíció. *A mag elemei olyan szétosztások, melyeket nem blokkol más szétosztás.*

Ha csak elosztásokkal blokkolhatunk, akkor a dominanciamagot kapjuk, mely eltérhet az előző magfogalomtól, de például szuperadditív játékoknál egybeesik vele.

3.0.10. Definíció. *A v játék szuperadditív, ha*

$$v(C) + v(T) \leq v(C \cup T) \quad C, T \subseteq N,\ C \cap T = \emptyset.$$

Látható, hogy a szuperadditivitás a konvexitásnál gyengébb fogalom, azaz minden konvex játék szuperadditív is.

3.0.11. *Példa.* Vegyük a következő TU-játékot:

	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
v	1	3	1	6	0	2	8

3.2. táblázat. A 3.0.11 példabeli TU-játék

A magot az alábbi lineáris egyenletrendszer megoldásai adják:

$$x^1 \geq 1$$

$$x^2 \geq 3$$

$$x^3 \geq 1$$

$$x^1 + x^2 \geq 6$$

$$x^1 + x^3 \geq 0$$

$$x^2 + x^3 \geq 2$$

$$x^2 + x^2 + x^3 = 8$$

Tehát a magot a következő vektorok alkotják: $Core(v) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^1 \leq 4, \max\{3, 6 - x_1\} \leq x^2 \leq 7 - x^1, x^3 = 8 - x^1 - x^2\}$

3.0.12. Definíció. *Az i játékos hasznosságfüggvénye egy $u^i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növő, folytonos függvény. Az olyan játékokat, ahol az i játékos az u^i hasznosságfüggvénye alapján adja meg a hasznosságát, hasznosságfüggvényes TU-játékoknak nevezzük, és TU^u-val jelöljük. Az ilyen v TU^u-játékok osztályát $\mathcal{G}_u^N$-val jelöljük.*

3.0.13. *Példa.* TU^u-játék esetén megadjuk a v függvényt és a hasznosságfüggvényeket: $u^1(x^1) = (x^1)^2, u^2(x^2) = 3x^2, u^3(x^3) = 5(x^3)^2$. Ekkor a magot szintén egy egyenletrendszer megoldásaiként kapjuk meg, ha a 3.0.11 példabeli TU-játékra felírt lineáris egyenletrendszerben x^i helyére $u^i(x^i)$-t írunk.

	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
v	1	3	1	6	0	2	8

3.3. táblázat. A 3.0.13 példabeli TU^u-játék

A kimeneteleknek ebben a játékban van egy tetszőlegesen osztható eleme, amely tetszőlegesen átruházható a játékosok között, sőt, átruházása bármely két szereplő között azonos nagyságú, ellentétes irányú kifizetésváltozást (de nem feltétlen azonos hasznosságváltozást) idéz elő. Vegyük észre, hogy ha $u^i(x^i) = x^i, i \in N$, akkor a v TU^u-játék egy TU-játék, tehát a TU^u-játék a TU-játék általánosítása. Mivel a hasznosságfüggvények monoton növőek, így a v TU^u-játék konvexitásása következik a hasznosságfüggvények nélküli játék konvexitásából, szigorúan monoton hasznosságfüggvények esetén ekvivalens vele.

Hasonlóan definiálható TU^u-játékok esetén is a mag:

3.0.14. Definíció. *Vegyünk egy $v \in \mathcal{G}_u^N$ TU^u-játékot. Azt mondjuk, hogy az x kifizetésvektor blokkolja az y kifizetésvektort a C koalíción keresztül, ha*

- $\sum_{i \in C} x^i \leq v(C)$*, azaz az x kifizetésvektor elérhető a C koalíció számára, és*
- $u^i(x^i) > u^i(y^i)$*, $i \in C$.*

3.0.15. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az x kifizetésvektor blokkolja az y kifizetésvektort, ha van olyan C koalíció, melyen keresztül blokkolja.*

3.0.16. Definíció. *A mag elemei olyan szétosztások, melyeket nem blokkol más szétosztás.*

A v TU-játék magjának elemeire hattatva az u^i hasznosságfüggvényeket a hozzátartozó (v, u) TU^u-játékbeli magelemeket kapunk. A TU^u játék magja tartalmazhat ezeken kívül más elemeket is, de szigorúan monoton hasznosságfüggvények esetén pont ezek az elemek alkotják a magját.

3.0.17. *Példa.* Legyen v az alábbi TU-játék:

	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
v	2	3	6

3.4. táblázat. A 3.0.17 példabeli TU-játék

Ekkor $Core(v) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq x^1 \leq 3, x^2 = 6 - x^1\}$.

Legyen a (v, u) TU^u-játék az előző v értékű játék, de az $u^1(x^1) = \max\{x^1, 1\}, u^2(x^2) = 2x^2$ hasznosságfüggvényekkel. Így $Core((v, u)) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^1 \leq 3, x^2 = 6 - x^1\}$.

4. fejezet

NTU-játékok

Eddig átruházható hasznosságú játékokról volt szó, a következőkben megszorításokat adunk a lehetséges kifizetések halmazára. A hasznosságfüggvények bevezetésével az egy az egyben átruházhatóságot már elvetettük, ám a játékosok tetszőlegesen átruházhatták egymásnak értéküket. Mostantól a koalíciókhoz nem értéket, hanem halmazokat rendelünk, a kifizetések ebből a halmazból kerülnek ki, megmondjuk konkrétan, melyik játékos mennyit kaphat. Ezzel további megkötést teszünk az elérhető kifizetésekre. Az ilyen játékok azokat a helyzeteket modellezik, amikor a felek között nincs teljes cserélési illetve átruházási lehetőség. Ezeket a játékokat nem átruházható hasznosságú játékoknak hívjuk(NTU-játékok).

4.0.18. *Példa.* Egy anyuka két gyerekének gyümölcsöket vásárol. A gyerekek választhatnak, hogy fejenként kapnak egy-egy banánt, vagy a kisebbik gyerek kap 2 almát, a nagyobbik 1 körtét. A kisebbik nem szereti körtét, az almát jobban szereti, mint a banánt. A nagyobbik gyerek jobban szereti a banánt, mint a körtét, és ő is az almát szereti legjobban. Mindketten ismerik a testvérüket, tudják ki mit mennyire szeret. A gyümölcsökből nem adhatnak egymásnak. Hogyan döntsenek?

A definíció után ezt a játékot modellezzük egy NTU-játékkal.

4.0.19. Definíció. *Egy nem átruházható hasznossággal rendelkező kooperatív játék (röviden NTU-játék) egy $V = (V(C))_{C \in 2^N} \subseteq \mathbb{R}^N$ halmazokból álló család, ahol V halmazértékű leképezés. A következő tulajdonságoknak kell teljesülnie, hogy NTU-játékról beszéljünk:*

- $V(\emptyset) = \emptyset$,
- $V(C) = V_p(C) \times \mathbb{R}^{N \setminus C}$, *ahol* $V_p(C) \subseteq \mathbb{R}^C$, $C \in \mathcal{N}$,
- $0^N \in V(C)$, $C \in \mathcal{N}$,

- $V(N)$ *zárt,*
- *ha* $x \in V(C)$, $y \in \mathbb{R}^N$, $y^C \leq x^C$, *akkor* $y \in V(C)$,
- $V_p^+(C) = \mathbb{R}_+^C \cap V_p(C)$ *korlátos,* $C \in \mathcal{N}$,

ahol a $V_p(C)$ *halmaz a* $V(C)$ *halmaz* C*-re vett projekciója, azaz*

$$V_p(C) = \left\{ y \in \mathbb{R}^C \mid \exists x \in V(C), y^i = x^i, i \in C \right\}.$$

4.0.20. Definíció. $x \in \mathbb{R}^N$ *szétosztás, ha* $x \in \partial V(N)$.

4.0.21. *Példa.* A 4.0.18 példa modellezése: A kisebb gyerek legyen az 1-es játékos, a nagyobbik a 2-es. Az alábbi NTU-játékkal modellezhetjük a példát:

$$V(\{1\}) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^1 \leq 1\},$$

$$V(\{2\}) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^1 \leq 1\},$$

$$V(\{1,2\}) = \{(4, 0.5)\} + \mathbb{R}_-^2.$$

NTU-játékokra is definiáljuk a magot, a cél most is a játékosok számára stabil szétosztás keresése. Először tehát a TU-játékokhoz hasonlóan definiáljuk a mageloszt ásokat:

4.0.22. Definíció. *A* V NTU*-játék magja,* $Core(V)$*, olyan* x*-ekből áll, melyekre* $x \in V(N)$*, és nincs olyan* $C \in \mathcal{N}$ *koalíció és* y *szétosztás, hogy* $y \in V(C)$ *, és* $x^i < y^i$*,* $i \in C$*, amely azt jelenti, hogy* $x \notin \text{int}V(C)$*,* $C \in \mathcal{N}$*-re. Tehát*

$$Core(V) = V(N) \backslash \bigcup_{C \in \mathcal{N}} \text{int}V(C)$$

A 4.0.21 példabeli NTU-játékban $Core(V) = \emptyset$, mivel a nagyobbik gyerek a banánnal jobban jár, mint a körtével, így azt választja, hiába járna a kisebbik gyerek sokkal jobban, nem tudja átruházni a hasznosságát.

Vezessük be a következő jelölést:

$$V^0(C) = \{x \in V(C) : x^i = 0, i \in N \backslash C\},$$

és legyen $V^0(\emptyset) = 0^N$.

NTU-játékok esetén többféle konvexitás fogalom is használatos: ordinális-, kardinális-, marginálisan-, koalíciós csatlakozásos-, egyéni csatlakozásos konvexitás. Ezek tulajdonságait és egymással való kapcsolatukat vizsgálják Csóka, Herings, Kóczy és Pintér (2011). Ezek közül két konvexitás fogalmat emelek ki:

4.0.23. Definíció. *Sharkley (1981) Egy NTU-játék kardinálisan konvex, ha tetszőleges $C, T \subseteq N$ esetén:*

$$V^0(C) + V^0(T) \subseteq V^0(C \cup T) + V^0(C \cap T).$$

Az alábbi játék kardinálisan konvex:

4.0.24. *Példa.* Legyen $N = \{1, 2, 3\}$

$$V(\{i\}) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^i \leq 0\}, i \in N,$$

$$V(\{1, 2\}) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^1 \leq 0, x^2 \leq 2\},$$

$$V(\{1, 3\}) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^1 + x^3 \leq 2\},$$

$$V(\{2, 3\}) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^2, x^3 \leq 0\},$$

$$V(\{1, 2, 3\}) = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \sum_{i \in N} x^i \leq 8\right\}.$$

4.0.25. Definíció. *Vilkov (1977) Egy NTU-játék ordinálisan konvex, ha tetszőleges $C, T \subseteq N$ esetén:*

$$V(C) \cap V(T) \subseteq V(C \cap T) \cup V(C \cup T).$$

Az alábbi játék ordinálisan konvex:

4.0.26. *Példa.* Legyen $N = \{1, 2, 3\}$,

$$V(\{i\}) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^i \leq 0\}, i \in N,$$

$$V(\{1, 2\}) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^1 \leq 0, x^2 \leq 2\},$$

$$V(\{1, 3\}) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^1 + x^3 \leq 1\},$$

$$V(\{2, 3\}) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^2, x^3 \leq 0\},$$

$$V(\{1, 2, 3\}) = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \sum_{i \in N} x^i \leq 2\right\}.$$

Ordinális konvex és kardinálisan konvex játékok között nem tudunk tartalmazásbeli kapcsolatot mondani. A későbbiekben ordinálisan konvex játékokat fogjuk vizsgálni, tételeket kimondani.

4.0.27. Tétel. *Greenberg (1985) Ordinálisan konvex játékok magja nem üres.*

A következőkben a magot egy más oldalról közelítem meg:

4.0.28. Definíció. *Egy NTU-játékban egy x kifizetésvektor blokkol egy y kifizetésvektort a C koalíción keresztül, ha*

- $x \in V(C),\ C \subseteq N$, *azaz az x kifizetésvektor elérhető a C koalíció számára,*
- $x^i > y^i$, $i \in C$.

4.0.29. Definíció. *A mag elemei olyan szétosztások, melyeket nem blokkol más szétosztás.*

5. fejezet

TUU-játékok

Ebben a fejezetben olyan játékokat vizsgálunk, amik több állapotból állnak össze, egy jelenbeli, ahol a kifizetésről döntenek a játékosok és jövőbeli állapotokból, melyek közül valamely ismert valószínűség szerint következik be egy. A modellekben tehát bizonytalanság van: a jövőben nem egy egyértelműen megadott játék valósul meg, hanem több közül egy, hogy melyik, az a véletlentől, külső tényezőktől függ. Olyan helyzetek modellezésére használjuk ezeket a játékokat, amikor a jelenből többféle kimenetelt egyszerre vizsgálunk. Például telefontársaságok összefognak, hogy közösen gyártsanak alkatrészeket, közös lefedettséget érjenek el, és egy év múlva a profitot szétosszák egymás között. A jelen állapotból a jövőre tekintésre az ex-ante kifejezést, a bekövetkező jövőbeli állapotban, a visszatekintésre a post-ante kifejezést használják. Ezeket a játékokat Habis és Herings (2011) vezette be:

5.0.30. Definíció. *Legyen S véges, nemüres halmaz, feltehetjük, hogy $0 \notin S$, és legyen $S_0 = S \cup \{0\}$. Az S_0 halmaz elemeit állapotoknak nevezzük, a 0 állapotot mostantól kezdőállapotnak hívjuk, a többi állapotra első időpontként hivatkozunk. Minden $s \in S_0$ állapotban egy $v_{s,u} \in \mathcal{G}_u^N$ TU^u-játékot játszunk. A kezdőállapotban döntéseket hozhatnak a játékosok, mielőtt bármi biztosat tudnának az első időpontról. Az i játékos hasznosságfüggvényére az $s \in S_0$ állapotban az u_s^i jelölést használjuk. A játékosok hasznosságfüggvényéről továbbra is feltesszük, hogy monoton növő és folytonos, valamint, hogy állapot-szeparábilis, azaz $u_0^i(x^i) = \sum_{s \in S} u_s^i(x_s^i)$. Az ilyen játékokat TUU-játékoknak nevezzük.*

5.0.31. *Példa.* Az alábbi példa egy kétszereplős TUU-játék, két jövőbeli állapottal, $S = \{s_1, s_2\}$. A baloldali oszlop jelöli az állapotokat, mellette a koalíciókhoz tartozó értékek. A hasznosságfüggvények legyenek a következők: $u_{s_1}^1(x_{s_1}^1) = x_{s_1}^1$, $u_{s_2}^1(x_{s_2}^1) = 3x_{s_2}^1$, $u_{s_1}^2(x_{s_1}^2) = (x_{s_1}^2)^2$, $u_{s_2}^2(x_{s_2}^2) = x_{s_2}^2$.

	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
s_1	2	3	4
s_2	1	5	7

5.1. táblázat. Az 5.0.31 példabeli TUU-játék

A játékok tehát különbözhetnek más-más állapotokban, és minden állapotra külön definiálhatunk kifizetéseket. A korábbi fogalmakhoz, tulajdonságokhoz hasonlóakat bevezetünk most is.

5.0.32. Definíció. *TUU-játék esetén kifizetésnek nevezzük azon x mátrixokat, melynek i sorában az s_i állapotbeli TU^u-játék kifizetése áll, $i \in S$.*

Nem minden kifizetés elérhető egy adott játékban, a TU-játékokkal analóg módon most is definiáljuk az alapfogalmakat.

5.0.33. Definíció. *Egy x kifizetésvektor elérhető egy $s \in S$ állapotban a C koalícióra számára, ha*

$$\sum_{i \in C} x_s^i \leq v_s(C).$$

5.0.34. Definíció. *A kezdőállapotban akkor hívunk egy kifizetést elérhetőnek, ha minden lehetséges $s \in S$ állapotban elérhető.*

Itt egy kifizetés tehát megadja minden lehetséges jövőbeli $s \in S$ állapot esetén a kifizetéseket. A kifizetés leírható egy mátrixként, melynek sorai a lehetséges állapotokat jelölik, az oszlopok pedig a játékosokat.

Egy x kifizetés blokkol egy y kifizetést a C koalíción keresztül, ha y nem optimális a blokkoló játékosok részére. Ekkor C-t blokkoló koalíciónak hívjuk. Olyan kifizetést szeretnénk keresni, amely minden ex-post állapotban stabil, tehát nem lehet blokkolni, sőt, ex-ante is stabil.

5.0.35. Definíció. *Egy x kifizetés blokkolja az y kifizetést a C koalíción keresztül, ha valamely $s \in S_0$ állapotra:*

- $\sum_{i \in C} x_s^i \leq v(C)$*, azaz elérhető a C koalíció számára az s állapotban, és*
- $u_s^i(x_s^i) > u_s^i(y_s^i), \quad i \in C.$

5.0.36. Definíció. *Egy v TU-játék C koalíciójához tartozó részjátéka az a $v^C \in \mathcal{G}^C$ játék, ahol $v^C(T) := v(T)$, $T \subseteq C$. Tehát v^C a v függvénynek C részhalmazaira való megszorítása.*

Előfordulhat, hogy a kezdőállapotban blokkoló kifizetést egy adott $s \in S$ állapotban blokkolni tud egy másik kifizetés. Ezeket a blokkolásokat ki szeretnénk zárni, ezért bevezetjük az alábbi definíciót:

5.0.37. Definíció. *Ray (1989) Azt mondjuk, hogy egy C koalíció blokkolása az $s \in S$ állapotban hihető, ha a blokkoló kifizetés s-beli komponense magbeli a C koalícióhoz tartozó részjátékban az s állapotban.*

A hihetőség kiterjeszthető a kezdőállapotra is:

5.0.38. Definíció. *A kezdőállapotban akkor hívunk egy C koalíció általi blokkolást hihetőnek, ha a blokkoló kifizetés minden $s \in S$ állapotbeli komponense magbeli a C koalícióhoz tartozó részjátékban.*

A TU-játéknál definiált maghoz hasonlóan definiálható most is az ún. gyenge szekvenciális mag (WS-mag, Kranich, Perea, Peters (2005), Habis és Herings (2011)),

5.0.39. Definíció. *A WS-mag elemei azok az $\{\bar{x}_s\}_{s\in S}$ szétosztások, melyeket semelyik állapotban sem lehet hihetően blokkolni, ahol $\bar{x}_s$ a szétosztás s-beli komponensét jelöli. A v TUU-játék WS-magját $WCore(v)$-vel jelöljük.*

Könnyen látható, hogy a WS-magbeli szétosztás külön az s állapotokra nézve mindig magbeli kell legyen. Ha a TUU-játék minden S-beli állapotában sima TU-játékok vannak, azaz $u_s^i(x_s^i) = x_s^i$, $i \in N$ a haszonosságfüggvények, illetve a kezdőállapotban a szokásos $u_0^i(x^i) = \sum_{s\in S} u_s^i(x_s^i) = \sum_{s\in S} x_s^i$, $i \in N$, akkor egy $\{\bar{x}_s\}_{s\in S}$ szétosztás akkor, és csak akkor lesz WS-magbeli, ha az $\bar{x}_s$ vektorok benne vannak az s állapothoz tartozó TU-játékok magjában minden $s \in S$ esetén.

5.0.40. *Példa.* Vegyünk egy kétszemélyes v TUU-játékot, $S = \{s_1, s_2, s_3\}$, a hasznosságfüggvények legyenek minden állapotban az identitásfüggvények: $u_s^i(x_s^i) = x_s^i, i \in N, s \in S$, a kifizetések a következők:

	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
s_1	1	2	4
s_2	3	1	6
s_3	0	2	5

5.2. táblázat. Az 5.0.40 példabeli TUU-játék

Ekkor a WS-mag a következő: $WCore(v) = \{x \in \mathbb{R}^{(2\times 3)} \mid 1 \leq x_1^1 \leq 2, x_1^2 = 4 - x_1^1, 3 \leq x_2^1 \leq 5, x_2^2 = 6 - x_2^1, 0 \leq x_3^1 \leq 3, x_3^2 = 5 - x_3^1\}$.

Ha megváltoztatjuk valamelyik u_s^i hasznosságfüggvényt (tehát egy TU^u-játék esetén), akkor elérhető, hogy egy szétosztás ne legyen WS-magbeli, holott külön-külön minden $s \in S$ állapotban magbeli lenne. Sőt, az is előfordulhat, hogy minden $s \in S$ állapotban a magok nem üresek, ám a WS-mag üres. Erre példa az alábbi játék:

	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
s_1	5	50	10	140	20	140	150
s_2	50	5	10	140	140	20	150

5.3. táblázat. Az 5.0.41 példabeli TUU-játék

5.0.41. *Példa.* A hasznosságfüggvények legyenek $u_{s_j}^i(x_{s_j}^i) = (x_{s_j}^i)^2,\ i \in \{1,2,3\}$, $j \in \{1,2\}$.

A fenti játékokban a mag egyelemű mindkét állapotban: s_1-ben $(10, 130, 10)$, s_2-ben $(130, 10, 10)$. Ám ez nem lesz WS-magbeli szétosztás, mivel a $\left(\begin{smallmatrix} 70 & 70 \\ 70 & 70 \end{smallmatrix}\right)$ szétosztás hihetően blokkolja a 0 állapotban. Így a WS-mag üres lesz.

Ez a példa jól mutatja a WS-mag bevezetésének fontosságát, hiszen a játékosok ex-ante maximalizálni szeretnék a várható értéküket, mielőtt még bármit tudnának a jövőben bekövetkező állapotról.

Fő tételünk az alábbi tétel, melyre később egy alternatív bizonyítást adunk.

5.0.42. Állítás. *Habis és Herings (2011) Ha a v TUU-játék minden $s \in S$ állapotában lévő TU^u-játékok konvexek, akkor a $WCore(v)$ nem üres.*

5.1. A WS-mag, mint egy NTU-játék magja

A WS-mag nem ürességét vizsgáljuk, a módszer a TUU-játék átformálása NTU-játékká, és az azokra alkalmazható tételek vizsgálata, kapcsolat keresése az eredeti játékkal.

Készítsünk egy V NTU-játékot a v TUU-játékból. Az egyszerűbb jelölés érdekében legyen $u_s(x) = (u_s^1(x_s^1), u_s^2(x_s^2), ..., u_s^k(x_s^k))$, $u(x) = (u_s(x))_{s \in S}$.

Első lépésben egy konkrét $s \in S$ állapotra definiáljuk egy $C \in \mathcal{N}$ koalíció hasznosságvektor-halmazát:

$$V_s(C) := \left\{ u_s(x) \in \mathbb{R}^C \mid \sum_{i \in C} x^i \leq v_s(C) \right\} + \mathbb{R}_-^C,$$

és $V_s(\emptyset) := \emptyset, s \in S$.

Ezután második lépésként, már egy NTU-játékot kapva egy C koalíció hasznosságvektor-halmaza az NTU-játékban legyen:

$$V(C) := \sum_{s \in S} V_s(C) \times \mathbb{R}^{N \setminus C} \cup \{0^N\}.$$

A kapott játék valóban NTU-játék, a legtöbb tulajdonság következik a TU-játék tulajdonságaiból (korlátosság, zártság), a maradék pedig a konstrukció miatt igaz (üreshalmazhoz üreshalmazt rendel, projekció tulajdonság, a nullvektor benne van a halmazban, leszállóság).

Adjunk elégséges feltételt, hogy egy v TUU-játéknál $\bar{x} \in WCore(v)$ legyen:

- Az $\bar{x}_s$ jelölje az $\bar{x}$ szétosztás $s \in S$ állapotbeli komponensét. Ekkor $\bar{x}_s$ legyen magbeli az s állapotban, minden $s \in S$-re.
- A TUU-játékból konstruált NTU-játékban (az előző konstrukció alapján) az $u(\bar{x})$ vektor legyen az NTU-játékban magbeli.

A következő példa mutatja, hogy a WS-magnál nem egyszerűen az egyes állapotokban lévő magelemek és a konstruált NTU-játék magjának metszetéről van szó: így ez a tulajdonság valóban csak elégséges, ám nem szükséges.

5.1.1. *Példa.* Legyen egy kétszereplős konvex TUU-játék a következő: $u^1_{s_1}(x^1_{s_1}) = x^1_{s_1}$, $u^2_{s_1}(x^2_{s_1}) = (x^2_{s_1})^2$, $u^1_{s_2}(x^1_{s_2}) = (x^1_{s_2})^2$, $u^2_{s_2}(x^2_{s_2}) = x^2_{s_2}$.

Az értékek:

	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
s_1	2	2	10
s_2	2	2	10

5.4. táblázat. Az 5.1.1 példabeli TUU-játék

Ekkor a konstruált NTU-játékban a $(100, 100)$ vektor a $C = \{1, 2\}$ koalíción keresztül létrejön (és ő lesz a magbeli elem): s_1-ben az 1-es játékos 0-t, a 2-es játékos 10-et kap, az s_2-ben pedig fordítva $(10, 0)$. Ellenben s_1-ben és s_2-ben is a magbeli elemekben legalább 2-t és 2-t kap az 1-es illetve a 2-es játékos is, így csak maximum $(66, 66)$-t érhetnek el magbeli elemek összegeként. Ez az NTU-játékban nem magbeli, mert az előbbi $(100, 100)$ vektor blokkolja. Tehát az egyes állapotokban lévő magelemek, és a konstruált NTU-játék magjának metszete üres. Ebből látható, hogy ez nem megfelelő magfogalom, hiszen konvex játékokból indultunk ki, mégis üres magot kapnánk. Elvárjuk, hogy ekkor a mag ne legyen üres.

Ezzel szemben A WS-mag nem üres, az alábbi szétosztás WS-magbeli:

	1	2
s_1	2	8
s_2	8	2

5.5. táblázat. Az 5.1.1 példabeli TUU-játék WS-magjának egy eleme

Sőt, ez az egyetlen WS-magbeli elem van.

Szintén a WS-mag bevezetésének indokoltságát mutatja, hogy ha minden $s \in S$ állapotban konvex játékból indulunk ki, akkor az összeg NTU-játék nem lesz kardinálisan konvex, sem ordinálisan konvex, pedig ez ésszerű elvárás lenne. Az alábbi példa ezt szemlélteti:

5.1.2. *Példa.* Legyen egy háromszereplős konvex TUU-játék a következő: Minden állapotban, minden játékosra legyen a hasznosságfüggvény az identitásfüggvény, a kifizetések pedig:

	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
s_1	0	1	0	1	0	1	1
s_2	0	1	0	1	0	1	1

5.6. táblázat. Az 5.1.2 példabeli TUU-játék

Itt $(1,0,1) \in (V^0(\{1,2\}) + V^0(\{2,3\}))$, de $(1,0,1) \notin (V^0(\{2\}) + V^0(\{1,2,3\}))$. Valamint $(1,0,1) \in (V(\{1,2\}) \cap V(\{2,3\}))$, de $(1,0,1) \notin (V(\{2\}) \cup V(\{1,2,3\}))$.

Láthattuk, hogy ez a konstrukció rossz, nem a WS-magot kaptuk meg, a konvexitás is elvész. Olyan konstrukciót szeretnénk, amely megőrzi a játék fontosabb jellemzőit, például a konvexitást, és a magból következtethetünk az eredeti TUU-játék WS-magjára.

Most definiáljunk egy NTU-játékot a v TUU-játékból a következőképpen, a kapott játék legyen V^v:
minden $C \subseteq \mathcal{N}$-re.

$$V_s^v(C) := (\{u_s(x_s) \in \mathbb{R}^C \mid x^C \in Core(v_s^C)\}) \times \mathbb{R}^{N \setminus C} \cup \{0^N\} + \mathbb{R}_-^N \ ,$$

és $V_s^v(\emptyset) := \emptyset$, $s \in S$. Továbbá, legyen

$$V^v(C) := \sum_{s \in S} V_s^v(C), \ C \subseteq N \ .$$

A kapott játék egy NTU-játék lesz, minden tulajdonság könnyen látható, egy részük a v játék tulajdonságaiból adódik (korlátosság, zártság), a maradék pedig a konstrukció miatt igaz (üreshalmazhoz üreshalmazt rendel, projekció tulajdonság, a nullvektor benne van a halmazokban, leszállóság).

Szűkítettük a megengedett szétosztások halmazát, ezáltal a blokkoló szétosztásokat is, nagyobb lett a nem blokkolható szétosztások halmaza. Ezzel már elértük, hogy ha az új játékban találunk egy blokkoló szétosztást, akkor az az eredeti játékban hihetően blokkoljon. Ezt fogalmazza meg az alábbi állítás

5.1.3. Állítás. *Az eredeti v TUU-játék WS-magja ekvivalens a kapott V^v NTU-játék magjával, tehát*

1. *Ha $\bar{x} \in WCore(v)$, akkor:*

$$\sum_{s \in S} u_s(\bar{x}_s) \in Core(V^v), \text{ ahol } \bar{x}_s \text{ az } \bar{x} \text{ } s\text{-beli komponense}, \ s \in S \ .$$

2. *Ha $\bar{x} \in Core(V^v)$, akkor létezik olyan $\{\bar{x}_s\}_{s \in S} \in WCore(v)$ elem, hogy $\bar{x} = \sum_{s \in S} u_s(\bar{x}_s)$.*

Bizonyítás. 1. Tegyük fel, hogy az eredeti v TUU-játék WS-magja nem üres, legyen az $\{\bar{x}_s\}_{s \in S} \in WCore(v)$. Ekkor a $\sum_{s \in S} u_s(\bar{x}_s)$ vektor eleme lesz az NTU-játékban a $V^v(N)$ halmaznak, és magbeli lesz:

Ha az NTU-játékban egy y szétosztás blokkoló szétosztás, akkor a hozzátartozó $\{y_s\}_{s \in S}$ szétosztás (amelyből előállt) a TUU-játékban hihetően blokkoló is a konstrukció miatt. Így, mivel a TUU-játékban nincs hihetően blokkoló szétosztás az $\{\bar{x}_s\}_{s \in S}$ szétosztáshoz, ezért nincs blokkoló szétosztás a $\sum_{s \in S} u_s(\bar{x}_s)$ szétosztáshoz az NTU-játékban. Tehát a kapott vektor az NTU-játék magjában lesz.

2. Tegyük fel, hogy a V^v NTU-játék magja nem üres, legyen $\bar{x} \in Core(V^v)$. Ekkor $\bar{x} = \sum_{s \in S} u_s(\bar{x}_s)$, ahol az $\bar{x}_s$ vektorok $s \in S$ állapotbeli TU^u-játékokok magbeli elemei (mivel így konstruáltuk a $V^v(N)$ halmazt). Véve ezeket az $\bar{x}_s$ vektorokat $\{\bar{x}_s\}_{s \in S} \in WCore(v)$, mivel az $\bar{x}_s$ vektorok külön-külön minden $s \in S$ állapotban magbeliek, a kezdőállapotban pedig szintén magbeli lesz, mivel $\bar{x}$ nem volt blokkolható az NTU-játékban, és $\bar{x}^i = \sum_{s \in S} u_s^i(\bar{x}_s^i) = u_0^i(\bar{x}^i)$, $i \in N$, így az $\{\bar{x}_s\}_{s \in S}$ szétosztás nem blokkolható az eredeti TUU-játékban a kezdőállapotban, tehát WS-magbeli elemet kaptunk. □

Ez a konstrukció már teljesíti az elvárt tulajdonságot, miszerint:

5.1.4. Tétel. *Ha az egyes $s \in S$ állapotokban lévő TU^u-játékok konvexek, akkor a kapott NTU-játék ordinálisan konvex.*

Ha a kapott NTU-játék ordinálisan konvex, akkor a magja nem üres (Greenberg (1985)), ami az előző állítás miatt ekvivalens azzal, hogy a megfelelő TUU-játék WS-magja nem üres, ami az 5.0.42 Tétel egy alternatív bizonyítását adja: ha a TUU-játék minden $s \in S$ állapotában a $v_s \in \mathcal{G}_u^N$ játékok konvexek, akkor a WS-mag nem üres.

Az 5.1.4 Tétel igazolásához két dolgot kell belátni. Az egyik, hogy minden $s \in S$ állapotban a részjátékok magjaiból generált NTU-játék ordinálisan konvex, a másik pedig, hogy ordinálisan konvex NTU-játékok összege (ha a különböző állapotokban lévő játékokat összeadjuk) ordinálisan konvex.

5.1.5. Állítás. *Legyen $v \in \mathcal{G}^N$ egy konvex játék, és minden $C \subseteq N$, $C \neq \emptyset$ koalícióra legyen*

$$V^v(C) := (\{u(x) \in \mathbb{R}^C \mid x^C \in Core(v^C)\} \times \mathbb{R}^{N \setminus C}) + \mathbb{R}^N_- \,, \tag{5.1}$$

és legyen $V^v(\emptyset) = \emptyset$, ahol v^C a v játék C koalíción vett részjátékát jelöli.

Ekkor a V játék egy ordinálisan konvex NTU-játék.

Bevezetünk egy definíciót:

5.1.6. Definíció. *Egy $\pi \in \Pi(T)$ általi marginális - hozzájárulásvektor az alábbi m_π vektor:*

- $m_{\pi(1)} = v(\{\pi(1)\})$,
- $m_{\pi(i)} = v(C \cup \{\pi(i)\}) - v(C)$, *ahol* $C := \{j \in N \mid \pi(j) < \pi(i)\}$.

Az alábbi segédállítást vezetjük be az 5.1.5 Állítás bizonyításához:

5.1.7. Lemma. *Legyen V az* (5.1) *által definiált játék, és $x \in V(C), y \in V(T)$. Ekkor létezik $z \in V(C \cup T)$:*

$x^C \leq z^C, \quad y^{T \setminus S} \leq z^{T \setminus S}$.

Bizonyítás. Mivel v konvex, ezért v minden részjátéka is konvex. Az Ichiishi-Shapley-tétel (Ichiishi (1981) ; Shapley (1971)) alapján egy konvex játék magja a marginális - hozzájárulásvektorok konvex kombinációja által kifeszített konvex poliéder. Tehát:

$$x^C = \sum_{\pi_C \in \Pi(C)} \alpha_{\pi_C} m_{\pi_C},$$

és

$$y^T = \sum_{\pi_T \in \Pi(T)} \beta_{\pi_T} m_{\pi_T},$$

ahol $\Pi(N)$ az N halmazon vett permutációk halmaza, m_π pedig a π permutáció általi marginális - hozzájárulásvektor.

Legyen $\pi_T \in \Pi(T)$, továbbá legyen $\pi'_T \in \Pi(T \setminus C)$ olyan, hogy ha $i \leq j$ a π_T permutáció szerint, $i, j \in T \setminus C$, akkor $i \leq j$ a π'_T permutáció szerint is. Ekkor legyen

$$z = \sum_{\pi_C \in \Pi(C),\ \pi_T \in \Pi(T)} \alpha_{\pi_C} \beta_{\pi_T} [m_{\pi_C}, m_{\pi'_T}]$$

ahol $[m_{\pi_C}, m_{\pi'_T}]$ a $[\pi_C, \pi'_T] \in \Pi(C \cup T)$ permutáció által adódó marginális - hozzájárulásvektor.

Ekkor z^C megegyezik x^C-vel , a $z^{T \setminus C}$ pedig legalább akkora, mint $y^{T \setminus C}$, mert a $T \setminus C$-beli játékosok sorrendje nem változott az eredeti $m_\pi, \pi \in \Pi(T)$ marginális - hozzájárulásvektorokhoz képest, legfeljebb a $C \cap T$-beliekhez képest későbbre kerültek $m_{\pi'_T}$-ben. Konvexitás miatt ekkor a marginális - hozzájárulások nem csökkennek, hiszen (konvexitás):

$$v(B) + v(A \cup \{i\}) \leq v(B \cup \{i\}) + v(A),\ A \subseteq B \subseteq N,\ \{i\} \notin B\ ,$$

és

$$v(A \cup \{i\}) - v(A) \leq v(B \cup \{i\}) - v(B)\ .$$

Így, mivel v konvex, $z^C \geq x^C$, $z^{T \setminus C} \geq y^{T \setminus C}$, és $z \in Core(v^{C \cup T})$, mert z marginális - hozzájárulásvektorok konvex kombinációja, és konvex játék minden részjátéka konvex.

□

A 5.1.5. Állítás bizonyítása. Korábbi konstrukciónál láthattuk, hogy V^v egy NTU-játék, megmutatjuk, hogy V^v ordinálisan konvex, azaz tetszőleges $C, T \subseteq N$-re:

$$V^v(C) \cap V^v(T) \subseteq V^v(C \cup T) \cup V^v(C \cap T).$$

$x \in \mathbb{R}^N$, $u(x) \in V^v(C) \cap V^v(T)$. Megmutatjuk, hogy ekkor $u(x) \in V^v(C \cup T)$.

$u(x^C) \in V_p^v(C)$, $u(x^T) \in V_p^v(T)$.

Legyen $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$ olyan, hogy $u(\bar{x}) \in V^v(C) \cap V^v(T)$, $\bar{x}^C \in Core(v^C)$, $\bar{x}^T \in Core(v^T)$, és $\bar{x} \geq x$. Ilyen $\bar{x}$ vektor létezik a konstrukció alapján.

Alkalmazzuk az 5.1.7. Lemmát $x = \bar{x}, y = \bar{x}$ választásokkal. Az u függvények monotonitását felhasználva megkaptuk, hogy $u(x) \leq u(\bar{x}) \leq u(z) \in V^v(C \cup T)$. Tehát beláttuk az állítást, mivel $u(x) = u(z) + y$ alakú, $y \in \mathbb{R}^N_-$. $\square$

5.1.8. Állítás. *A* (5.1) *által definiált ordinálisan konvex NTU-játékok összege (ha a különböző állapotokban lévő játékokat összeadjuk) ordinálisan konvex.*

Tehát a következőt kell belátni az állítás igazolásához:

5.1.9. Lemma. *Legyen $V_s, s \in S$ az* (5.1) *alapján készült (különböző v_s-ekhez) ordinálisan konvex NTU-játékok, tehát minden $s \in S$-re:*

$$V_s(C) \cap V_s(T) \subseteq V_s(C \cup T), \quad C, T \subseteq N \ .$$

Ekkor

$$\sum_{s \in S} V_s(C) \cap \sum_{s \in S} V_s(T) \subseteq \sum_{s \in S} V_s(C \cap T) \cup \sum_{s \in S} V_s(C \cup T) \ , \quad C, T \subseteq N \ .$$

Bizonyítás. Ennél többet látunk be:

$$\sum_{s \in S} V_s(C) \cap \sum_{s \in S} V_s(T) \subseteq \sum_{s \in S} V_s(C \cup T), \quad C, T \subseteq N \ .$$

Legyen

$$u(z) \in \sum_{s \in S} V_s(C) \cap \sum_{s \in S} V_s(T).$$

Itt $u(z)$ azt jelöli, hogy

$$u(z) = \sum_{s \in S} u_s(x_s), \ u_s(x_s) \in V_s, s \in S,$$

mivel $u(z) \in \sum_{s \in S} V_s(C)$, illetve $u(z) \in \sum_{s \in S} V_s(T)$ Ekkor tehát léteznek $u_s(x_s) \in V_s(C)$, $s \in S$ és $u_s(y_s) \in V_s(T)$, $s \in S$ vektorok, melyekre $(u(z))^j = \sum_{s \in S} u_s^j(x_s^j)$, és $(u(z))^j = \sum_{i \in S} u_s^j(y_s^j)$, $j \in C \cup T$.

Ekkor vegyünk minden x_s vektorhoz egy $\bar{x}_s \in Core(v_s^C)$ vektort, valamint minden y_s vektorhoz egy $\bar{y}_s \in Core(v_s^T)$ vektort, hogy:

$$x_s^j \leq \bar{x}_s^j, \text{ és } y_s^j \leq \bar{y}_s^j, \ j \in (C \cup T).$$

Most az 5.1.7. Lemma alapján léteznek $\bar{z}_s \in Core(v_s^{C \cup T})$ vektorok, melyekre $\bar{z}_s^m = \bar{x}_s^m, m \in C$, és $\bar{z}_s^n \geq \bar{y}_s^n$, $n \in T \setminus C$. Itt tehát kihasználtuk, hogy a V_s játékok az előző állítás alapján készültek konvex játékokból.

Azt állítjuk, hogy $(u(z))^j \leq \sum_{s\in S}(u_s(\bar{z}_s))^j$, $j \in (C \cup T)$. Ez pedig igaz, mert

$$z^j = \sum_{s\in S} x_s^j \leq \sum_{s\in S} \bar{z}_s^j, j \in C$$

és

$$z^j = \sum_{s\in S} y_s^j \leq \sum_{s\in S} \bar{z}_s^j, j \in T\backslash C.$$

Ekkor tehát $u(z) \leq u(\bar{z})$.

Az u_s^j hasznosságfüggvények monotonitását kihasználva ezzel igazoltuk az állítást, hiszen $\sum_{s\in S} u_s(\bar{z}_s) \in \sum_{s\in S} V_s(C \cup T)$, és a V halmazbeli elemeknél koordinátánként nem-nagyobb vektorok is elemei a halmaznak a konstrukció miatt. □

Beláttuk az 5.1.5 Állítást és az 5.1.8 Állítást, ezzel igazoltuk az 5.1.4 Tételt.

6. fejezet

Kiegyensúlyozott játékok

Ebben a fejezetben az NTU-játék magjának nem ürességére szolgáltatunk egy elégséges feltételt. Nem egy adott magbeli szétosztást keresünk, így a megoldás nem konstruktív. A kiegyensúlyozottságot először TU-játékokra vezette be Bondareva (1963) és Shapley (1967), ahol ez egy szükséges és elégséges feltételt ad a mag nem ürességére. Scarf (1967) ezt terjesztette ki NTU-játékokra, megmutatta, hogy kiegyensúlyozott NTU-játékok magja nem üres. Billera további általánosítást adott, a π-kiegyensúlyozottságot.

6.1. Kiegyensúlyozottság

Először TU-játékokra definiáljuk a kiegyensúlyozottságot.

6.1.1. Definíció. *Koalíciók egy $\beta \subseteq \mathcal{N}$ csoportját kiegyensúlyozottnak mondjuk, ha léteznek $(\lambda_S)_{S\in\beta} \in \mathbb{R}_+$ súlyok, melyekre*

$$\chi_N = \sum_{S\in\beta} \lambda_S \chi_S.$$

6.1.2. Definíció. *Egy TU-játék kiegyensúlyozott, ha minden kiegyensúlyozott $\beta \subseteq \mathcal{N}$ koalíciócsoportjára fennáll:*

$$\sum_{S\in\beta} v(S) \leq v(N).$$

Egy TU-játék magja pontosan akkor nem üres, ha kiegyensúlyozott. NTU-játékokra is kiterjeszthető a feltétel, ám ott csak egy elégséges feltételt kapunk. A kiegyensúlyozott koalíciók ugyanazok lesznek, mint TU-játékok esetén.

6.1.3. Definíció. *Egy NTU-játék kiegyensúlyozott, ha minden kiegyensúlyozott $\beta \subseteq \mathcal{N}$ koalíciócsoportjára fennáll:*

$$\bigcap_{S\in\beta} V(S) \subseteq V(N).$$

NTU-játékok esetén a kiegyensúlyozottság csak egy elégséges feltételt ad a mag nem ürességére, ám nem lesz szükséges. Ezt szemlélteti az alábbi példa, mely nem kiegyensúlyozott, de a magja nem üres:

6.1.4. *Példa.* Billera (1970)

$$V(\{i\}) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^i \leq 0\},\ i \in \{1,2,3\},$$

$$V(\{1,2\}) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^1 \leq 4, x^2 \leq 3\},$$

$$V(\{1,3\}) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^1 \leq 2, x^3 \leq 5\}$$

$$V(\{2,3\}) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 \leq 4, x^3 \leq 3\},$$

$$V(\{1,2,3\}) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^1 \leq 4, x^2 \leq 3, x^3 \leq 0\}$$

$$\cup\{x \in R^3 \mid x^1 \leq 2, x^2 \leq 4, x^3 \leq 3\}.$$

A $(2,4,3)$ vektor magbeli.

6.2. π-kiegyensúlyozottság

Ebben a fejezetben az NTU-játékoknál bevezetett kiegyensúlyozottsághoz hasonló, általánosabb feltételt adunk a játék magjának nem ürességére.

6.2.1. Definíció. *$(\pi_C)_{C\in\mathcal{N}}$ vektorokból álló család megengedett, ha minden $\emptyset \neq C \subseteq N$ halmazra:*

- $\pi_C \in \mathbb{R}^N$,
- $\pi_C > 0$,
- $\pi_C^i = 0, i \in N \setminus C$,
- $\pi_N \gg 0$.

6.2.2. Definíció. *Billera (1970) Legyen π megengedett vektorcsalád. Koalíciók egy $\beta \subseteq \mathcal{N}$ csoportját π-kiegyensúlyozottnak mondjuk, ha léteznek $(\lambda_C)_{C\in\beta} \in \mathbb{R}_+$ súlyok, melyekre*

$$\pi_N = \sum_{C\in\beta} \lambda_C \pi_C.$$

Egy ezzel ekvivalens definíciót is megfogalmazhatunk:

6.2.3. Definíció. *Legyen π megengedett vektorcsalád. Legyen $\hat{\pi}_C = \frac{\pi_C}{|\pi_C|}$. Koalíciók egy $\beta \subseteq \mathcal{N}$ csoportját π-kiegyensúlyozottnak mondjuk, ha létezik $\lambda \in \Delta_{\mathcal{N}}$, melyre:*

$$\hat{\pi}_N = \sum_{C \in \beta} \lambda_C \hat{\pi}_C.$$

6.2.4. *Példa.* Legyen $\pi_1 = \pi_2 = \pi_1 = 3\chi_i, \pi_{1,2} = (2,2,0), \pi_{1,3} = (1,0,2), \pi_{2,3} = (0,5,25), \pi_{1,2,3} = (1,2,3)$. Ekkor $\hat{\pi}_1 = \hat{\pi}_2 = \hat{\pi}_3 = \chi_i, \hat{\pi}_{1,2} = (0.5, 0.5, 0), \hat{\pi}_{1,3} = (1/3, 0, 2/3), \hat{\pi}_{2,3} = (0, 1/6, 5/6), \hat{\pi}_{1,2,3} = (1/6, 2/6, 3/6)$.

Kiegyensúlyozó koalíciók például: $(\{1\}, \{2\}, \{3\})$; $(\{1,2\}, \{2\}, \{2,3\})$.

6.2.5. Definíció. *Egy V játék π -kiegyensúlyozott, ha minden π-kiegyensúlyozott $\beta \subseteq \mathcal{N}$ koalíciócsoportjára fennáll:*

$$\bigcap_{C \in \beta} V(C) \subseteq V(N)$$

A 6.1.4 példa π-kiegyensúlyozott.

6.2.6. Tétel. *Billera (1970) Legyen V egy NTU-játék és legyen π egy megengedett vektorcsalád. Ha V π-kiegyensúlyozott, akkor Core$(V) \neq \emptyset$.*

A tétel Billera nevéhez köthető, de a lenti bizonyítás Shapley és Vohra (1991) bizonyítása:

Bizonyítás. Legyen $b \in \mathbb{R}^n$ és definiáljuk a $(V + b)$ játékot a $(V + b)(C) = V(C) + b^C$, minden $C \subseteq N$ koalícióra. Ekkor a $(V + b)$ játék magja nem üres akkor, és csak akkor, ha V magja nem üres, illetve a $(V + b)$ játék π-kiegyensúlyozott akkor, és csak akkor, ha a V játék π-kiegyensúlyozott. A mag b-vel fog eltolódni, a π-kiegyensúlyozottságon se változtat az eltolás. Tehát ezentúl feltehetjük, hogy

$$v(\{i\}) > 0, \text{ minden } i \in N.$$

Valamint az NTU-játék definíciójából adódóan létezik $q > 0$ szám úgy, hogy minden $C \subseteq N$-re,

$$x^C \in V_p(C) \cap R^C_+ \Rightarrow x^i < q, \text{ minden } i \in C.$$

Legyen $Q = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x \leq q\chi_N\}$ és

$$Z = \left(\bigcup_{C \in 2^N} V(C) \right) \cap Q.$$

Mivel $V(C)$ leszálló, így Z is az, azaz: $Z = Z - \mathbb{R}^N_+$. Jelölje ∂Z a Z határát. Ekkor

$$(z \in \partial Z \text{ és } y \gg z) \Rightarrow y \notin Z.$$

Vegyük észre, hogy minden $i \in N$-re , $v(\{i\})\chi_{\{i\}} + q\chi_{N\setminus\{i\}} \in Z$. Emiatt, és az előző megállapítás miatt, valamint mivel minden $v(\{i\}) > 0, i \in N$:

$$(z \in \partial Z \text{ és } z^j = 0 \text{ valamely } j \in N - re) \Rightarrow \max_{i\in N} z^i = q.$$

Ezután lássuk be, hogy ha van olyan β π-kiegyensúlyozott koalíciórendszer és $\hat{z} \in \partial Z$, melyre $\hat{z} \in \bigcap_{S\in B} V(C)$. Végül be kell lássuk, hogy $\hat{z} \in Core(V)$.

Legyen $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^N_+ \mid x(N) = 1\}$, és definiáljuk minden $x \in \Delta$ -ra:

$$f(x) = \{y \in \partial Z \mid y = tx, t \geq 0\}.$$

Vegyük észre, hogy minden $x \in \Delta$-ra: $n(q+1)x \notin Z$, mivel $0 \in$int Z ("int" jelöli a halmaz belsejét). Így $f(x) \neq \emptyset$ minden $x \in \Delta$-ra. Mivel $f : \Delta \rightrightarrows \partial Z$ korlátos és zárt gráfú, így felülről félig folytonos.

Azt állítjuk, hogy f egyértékű, így folytonos. Indirekt tegyük fel, hogy f nem egyértékű. Legyen $x \in \Delta$ és $y, \hat{y} \in f(x), y = tx, \hat{y} = \hat{t}x, \hat{t} > t$. Ha $x \gg 0$, akkor $\hat{y} \gg y$, ami miatt nem lehetne y és $\hat{y}$ is határpont. Így $K := \{k \in N \mid x^k = 0\} \neq \emptyset$. Ekkor $j \in N \setminus K, y^j < \hat{y}^j \leq q$, ami ellentmond a korábbi megállapításunknak. Tehát f folytonos.

f segítségével definiáljuk a $g : \Delta \rightrightarrows \Delta$ halmaz-értékű leképezést:

$$g(x) = \{\hat{\pi}_C \mid C \in \mathcal{N} \text{ és } f(x) \in V(C)\}.$$

$g(x) \neq \emptyset$ minden $x \in \Delta$, mivel $f(x)$ egy nemüres részhalmaza $\bigcup_{C\subseteq N} V(C)$-nek. Továbbá g felülről félig folytonos, így a $\tilde{g} : \Delta \times \Delta \rightrightarrows \Delta$, $\tilde{g}(x, y) =$ konvb $g(x)$, $x, y \in \Delta$, halmaz-értékú függvény felülről félig folytonos és kompakt értékű.

Folytatásként készítsünk egy $h : \Delta \times \Delta \to \Delta$ folytonos függvényt:

$$h^i(x, y) = \frac{x^i + (y^i - \hat{\pi}^i_N)_+}{1 + \sum_{j\in N} \left(y^j - \hat{\pi}^j_N\right)_+}, \text{ minden } i \in N, x, y \in \Delta.$$

A $h \times \tilde{g} : \Delta \times \Delta \rightrightarrows \Delta \times \Delta$ leképezés kielégíti a Kakutani-féle fixpont tétel feltételeit. Tehát létezik $(\hat{x}, \hat{y}) \in \Delta \times \Delta$, melyre $\hat{x} = h(\hat{x}, \hat{y})$ és $\hat{y} \in$ konvb $g(\hat{x})$. Így, átrendezve:

$$\hat{x}^i \left(\sum_{j\in N} \left(\hat{y}^i - \hat{\pi}^j_N\right)_+ \right) = (\hat{y}^i - \hat{\pi}^i_N)_+, \text{ minden } i \in N.$$

Azt állítjuk, hogy $\hat{y} = \hat{\pi}_N$: Indirekt tegyük fel, hogy

$$\sum_{j\in N} \left(\hat{y}^j - \hat{\pi}^j_N\right)_+ > 0.$$

Legyen $K_+ = \{i \in N \mid \hat{x}^i > 0\}$ és $K_0 = N \setminus K_+$. Ha $i \in K_+$, akkor $\hat{y}^i > \hat{\pi}^i_N > 0$. Így $K_0 \neq \emptyset$, mert $\hat{y} \in \Delta$. Mivel $\hat{y} \in$ konvb $g(\hat{x})$, így minden $i \in K_+$-ra létezik $C \subseteq N$, hogy $i \in C$ és $f(\hat{x}) \in V(C)$. Így q választása, és $f(\hat{x}) \geq 0$ miatt $f^i(\hat{x}) < q$ minden $i \in K_+$-ra. Mivel $f^j(\hat{x}) = 0$ minden $j \in K_0$-ra, és $K_0 \neq \emptyset$, így egy előző megállapításunkkal ellentmondáshoz jutunk. Tehát $\hat{y} = \hat{\pi}_N$.

Legyen $\beta = \{C \subseteq N \mid f(\hat{x}) \in V(C)\}$. Ekkor

$$\hat{\pi}_N \in \text{ konvb } \{\hat{\pi}_S \mid C \in \beta\},$$

azaz β kiegyensúlyozott. Legyen $\hat{z} = f(\hat{x})$. Ekkor $\hat{z} \in \bigcap_{C \in B} V_C$. Mivel V π-kiegyensúlyozott, $\hat{z} \in V(N)$. A bizonyítás befejezéséhez megmutatjuk, hogy $\hat{z} \in Core(V)$. Definíció szerint $\hat{z} \geq 0$, így $\bar{z} \ll q\chi_N$. Indirekt tegyük fel, hogy $\hat{z} \notin Core(V)$. Ekkor létezik $\emptyset \neq C \subseteq N$ és $x \in V(C)$, melyre $x^C \gg \hat{z}^C$. Feltehetjük, hogy $x^i = q$ a maradék $i \in N \setminus C$ koordinátán. Ekkor $x \in Z$, és $x \gg \hat{z} \in \partial Z$, amellyel ellentmondáshoz jutottunk. Tehát $\hat{z} \in Core(V)$ nem üres. □

A π-kiegyensúlyozottság csak elégséges feltétel a mag nem ürességére, a következő NTU-játék nem π-kiegyensúlyozott semmilyen π vektorrendszerhez, de magja nem üres:

6.2.7. *Példa.* Billera (1970)

$$V(\{i\}) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^i \leq 0\},\ i \in \{1,2,3\},$$
$$V(\{1,2\}) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^1 + x^2 \leq 1\},$$
$$V(\{1,3\}) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^1 \leq 0, x^3 \leq 0\},$$
$$V(\{2,3\}) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 \leq 0, x^3 \leq 0\},$$
$$V(\{1,2,3\}) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^1 \leq \frac{1}{2}, x^2 \leq \frac{1}{2}, x^3 \leq 0\}.$$

Az $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ vektor magbeli.

Az alábbi példa azt fogja szemléltetni, hogy az, ha minden állapotban a képzett NTU-játék π-kiegyensúlyozott, méghozzá ugyanazzal a π-vel, nem elégséges feltétele a WS-mag nem ürességének. Tehát az összegjáték nem π-kiegyensúlyozott, és még a WS-mag is üres.

6.2.8. *Példa.* Az alábbi hasznosságfüggvényes v TUU-játék állapotaiból képzett NTU-játékok $\bar{\pi}$-kiegyensúlyozottak, ám a v játék WS-magja üres:

A hasznosságfüggvényeket később adom meg, magyarázattal együtt.

Természetesen az állapotonkénti magok nem üresek, pl. a $(40, 65, 10, 15)$ vektor benne van a magban.

	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{1,4\}$	$\{2,3\}$	$\{2,4\}$	$\{3,4\}$
s_1	30	40	10	10	95	0	55	70	0	25
s_2	30	40	10	10	95	0	55	70	0	25

	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,4\}$	$\{1,3,4\}$	$\{2,3,4\}$	$\{1,2,3,4\}$
s_1	110	0	0	0	130
s_2	110	0	0	0	130

6.1. táblázat. A 6.2.8 példabeli TUU-játék

Először belátom, hogy a WS-mag üres. Az első egyszerű észrevételem az, hogy ha az s_1 és az s_2 állapotbeli magelemek összegeit tudom dominálni, akkor a domináló szétosztásokkal tudom dominálni a kisebb vektorok összegét is. A módszer a következő lesz: ha az s_2 állapotban a 2-es játékos 64-nél kevesebbet kap, akkor az $\{1,2\}$ koalícióval dominálom az szétosztást, ha pedig a 2-es játékos ≥ 64-et kap, akkor az $\{1,4\}$ koalícióval.

Ehhez használt észrevételek az állapotonkénti magra (hasznosságok nélkül):

1. Az 1-es, 2-es és 3-as játékos együtt legalább 110-et kapnak. Ez abból következik, hogy $v(\{1,2,3\}) = 110$.

2. A 4-es játékos maximum 20-at kap, (minimum 10-et). Ez az 1. pont, és $v(\{1,2,3,4\}) = 130$ következménye.

3. Az 1-es játékos legalább 35-öt kap, mivel a 4-es játékos maximum 20-at kap, és $v(\{1,4\}) = 55$.

4. Az 1-es játékos maximum 50-et kap, mivel $v(\{2,3\}) = 70, v(\{4\}) = 10$, és $v(\{1,2,3,4\}) = 130$.

5. A 2-es játékos nem kaphat 45-nél kevesebbet. Ez a 4. állítás és $v\{1,2\} = 95$ következménye.

6. A 2-es játékos nem kaphat 65-nél többet, mivel $v(\{1,4\}) = 55, v(\{3\}) = 10$, és $v(\{1,2,3,4\}) = 130$.

7. Ha a 2-es játékos legalább 64-et kap, akkor az 1-es játékos legfeljebb 41-et, a 4-es játékos pedig legalább 14-et. Osszuk ki először mindenkinek a minimumot:

$(35, 64, 10, 10)$, ez eddig 119. A fennmaradó 11-et úgy kell szétosztanunk, hogy az 1-es és 4-es játékos együtt még legalább 10-et kapjanak, a 3-as és 4-es játékos együtt még legalább 5-öt. Mivel a 3-as és 4-es játékos legalább 5-öt kapnak együtt, így az 1-es játékos maximum 6-ot még, tehát összesen 41-et. Emiatt a 4-es játékos legalább 14-et kell kapjon ($v(\{1, 4\}) = 55$ miatt).

A dominálás a következőképpen történik:

Az 1. eset, hogy $x^2_{s_2} < 64$. Ekkor a domináló szétosztás a következő:

	1	2
s_1	55	40
s_2	30	65

Ehhez az alábbiaknak kell teljesülnie:

$$u^1_{s_1}(55) + u^1_{s_2}(30) > u^1_{s_1}(50) + u^1_{s_2}(50)$$
$$u^2_{s_1}(40) + u^2_{s_2}(65) > u^2_{s_1}(65) + u^2_{s_2}(64)$$

A baloldalon a dominálásnál kapott értékek, a jobboldalon pedig a maximális dominálandó értékek. Az 1-es játékos mindkét állapotban maximum 50-et kap, a 2-es játékos az s_1 állapotban maximum 65-öt, az s_2 állapotban maximum 64-et (feltétel miatt).

A 2. eset, ha $65 \geq x^2_{s_2} \geq 64$. Ekkor a domináló szétosztás a következő:

	1	4
s_1	34	21
s_2	45	10

Ehhez az alábbiaknak kell teljesülnie:

$$u^1_{s_1}(34) + u^1_{s_2}(45) > u^1_{s_1}(50) + u^1_{s_2}(41)$$
$$u^3_{s_1}(21) + u^3_{s_2}(10) > u^3_{s_1}(20) + u^3_{s_2}(20)$$

A baloldalon a dominálásnál kapott értékek, a jobboldalon pedig a maximális dominálandó értékek. A 1-es játékos s_2-beli 41 maximuma a 7-es számú észrevételből jön.

Összesítve a feltételeket:

$$u^1_{s_1}(55) + u^1_{s_2}(30) > u^1_{s_1}(50) + u^1_{s_2}(50)$$

$$u^2_{s_1}(40) + u^2_{s_2}(65) > u^2_{s_1}(65) + u^2_{s_2}(64)$$
$$u^1_{s_1}(34) + u^1_{s_2}(45) > u^1_{s_1}(50) + u^1_{s_2}(41)$$
$$u^4_{s_1}(21) + u^4_{s_2}(10) > u^4_{s_1}(20) + u^4_{s_2}(20)$$

Legyenek a játékosok hasznosságfüggvényei az alábbiak:

$$u^1_{s_1}(x^1_{s_1}) = \mathbb{I}_{\{x^1_{s_1} \leq 50\}} x^1_{s_1} + \mathbb{I}_{\{x^1_{s_1} \geq 50\}}(50 + (x^1_{s_1} - 50)100)$$
$$u^1_{s_2}(x^1_{s_2}) = 10x^1_{s_2}$$
$$u^2_{s_1}(x^2_{s_1}) = x^2_{s_1}$$
$$u^2_{s_2}(x^2_{s_2}) = 100x^2_{s_2}$$
$$u^4_{s_1}(x^4_{s_1}) = 100x^4_{s_1}$$
$$u^4_{s_2}(x^4_{s_2}) = x^4_{s_2}$$

Behelyettesítve kapjuk:

$$(50 + 500) + 300 > 50 + 500$$
$$40 + 6500 > 65 + 6400$$
$$34 + 450 > 50 + 410$$
$$2100 + 10 > 2000 + 20$$

Tehát dominálnak a vektorok.

Ezzel tehát beláttuk, hogy a WS-mag üres.

Ezek után adok egy π-t, melyhez mindkét játék π-kiegyensúlyozott. Mivel a két állapot (s_1, s_2) csak a hasznosságfüggvényekben különböznek, így elég belátni az egyikről, hogy van hozzátartozó π, amivel π-kiegyensúlyozott, ekkor a másik állapot is az lesz.

Ez(ek) a játékok $\bar{\pi}$-kiegyensúlyozottak:

$$\bar{\pi}(\{1\}) = (1, 0, 0, 0)$$
$$\bar{\pi}(\{2\}) = (0, 1, 0, 0)$$
$$\bar{\pi}(\{3\}) = (0, 0, 1, 0)$$
$$\bar{\pi}(\{4\}) = (0, 0, 0, 1)$$

$$\bar{\pi}(\{1, 2\}) = (0, 1, 0, 0)$$

$$\bar{\pi}(\{1,3\}) = (1,0,0,0)$$

$$\bar{\pi}(\{1,4\}) = (1,0,0,0)$$

$$\bar{\pi}(\{2,3\}) = (0,1,0,0)$$

$$\bar{\pi}(\{2,4\}) = (0,0,0,1)$$

$$\bar{\pi}(\{3,4\}) = (0,0,0,1)$$

$$\bar{\pi}(\{1,2,3\}) = (1,0,0,0)$$

$$\bar{\pi}(\{1,2,4\}) = (1,0,0,0)$$

$$\bar{\pi}(\{1,3,4\}) = (1,0,0,0)$$

$$\bar{\pi}(\{2,3,4\}) = (0,0,0,1)$$

$$\bar{\pi}(\{1,2,3,4\}) = (1,1,1,1)$$

A kapott (részjátékbeli magokból képzett) NTU-játékok (az egyszerűség és átláthatóság kedvéért a hasznosságfüggvények nélkül), $k \in \{1,2\}$. $*$ tetszőleges valós számot jelent.

$$V_{s_k}(\{1\}) = (30,*,*,*)$$

$$V_{s_k}(\{2\}) = (*,40,*)$$

$$V_{s_k}(\{3\}) = (*,*,10,*)$$

$$V_{s_k}(\{4\}) = (*,*,*,10)$$

$$V_{s_k}(\{1,2\}) = (30+i, 65-i, *, *), 0 \leq i \leq 25, i \in \mathbb{R}$$

$$V_{s_k}(\{1,3\}) = \emptyset$$

$$V_{s_k}(\{1,4\}) = (30+i, *, *, 25-i), 0 \leq i \leq 15, i \in \mathbb{R}$$

$$V_{s_k}(\{2,3\}) = (*, 40+i, 30-i, 0), 0 \leq i \leq 20, i \in \mathbb{R}$$

$$V_{s_k}(\{2,4\}) = \emptyset$$

$$V_{s_k}(\{3,4\}) = (*, *, 10+i, 15-i), 0 \leq i \leq 5, i \in \mathbb{R}$$

$$V_{s_k}\{1,2,4\} = \emptyset$$

$$V_{s_k}\{1,3,4\} = \emptyset$$

$$V_{s_k}\{2,3,4\} = \emptyset$$

$V_{s_k}(\{1,2,3\})$ esetében pedig az a fontos, hogy a halmazbeli vektorok első koordinátája nem nagyobb 40-nél.

Az egyelemű koalíciókat nem kell figyelnünk, mert azok csak az adott koordinátára kötik meg a metszetbeli halmazelemeket, az viszont a magtulajdonság miatt nem számít. Az üreshalmazokkal való metszetet szintén nem kell figyelnünk.

Így a maradék ellenőrizendő esetek, hogy a β kiegyensúlyozó koalíciórendszerre az alábbiak igazak. Gyakorlatilag szétválogatom koordinátánként a π-ket:

1.: $\{1,3\}$ vagy $\{1,4\}$ vagy $\{1,2,3\}$ koalíció köt meg az 1-es koordinátára.

2.: $\{1,2\}$ vagy $\{2,3\}$ köthet meg a 2-es koordinátára.

3.: csak a $\{3\}$ köthet meg a 3-as koordinátára, így ez mindenképp 10.

4.: $\{3,4\}$ köthet meg a 4-es koordinátára.

Az 1-es koordinátán maximum 45, 3-as és 4-es koordinátákon maximum 10,15 áll. A $(45,60,10,15)$ vektor benne van a magban, így a vizsgálandó eset, ha a vektor 2-es koordinátája nagyobb 60-nál. Ez úgy lehetséges, ha a $V(\{1,2\})$ halmaz benne van π-kiegyensúlyozottságnál vizsgált kiegyensúlyozó metszetben. Tehát legyen a 2-es koordinátán $65-i, i \leq 5$. Ekkor az 1-es koordinátán legfeljebb $30+i, i \leq 5$ áll. A $(40,65,10,15)$ vektor benne van a magban, így ekkor is igaz a tartalmazás.

Tehát a játékok π-kiegyensúlyozottak.

Ezzel a példával beláttuk, hogy egy TUU-játék esetén az, ha minden állapotban a magokból konstruált NTU-játékok $\bar{\pi}$-kiegyensúlyozottak, nem elégséges feltétele a WS-mag ürességének.

6.3. Π-kiegyensúlyozottság

A π-kiegyensúlyozottsággal adtunk egy elégséges feltétel az NTU-játék magjának nemürességére. A végső cél azonban az, hogy egy szükséges és elégséges feltételt szolgáltassunk a mag nem-ürességére. Predtetchinski és Herings (2004) a π-kiegyensúlyozottságot terjeszti ki. A cikk tanulmányozása során az elégségesség kapcsán problémákba ütköztünk, a szerzők nem bizonyították az alábbi tételt, csupán egy korábbi tétel bizonyítására hivatkoztak:

Gyenge Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz-Shapley (K-K-M-S) tétel:

6.3.1. Állítás. *Legyen $\{C_S \subseteq \Delta_N \mid S \in \mathcal{N}\}$ a Δ_N egy zárt fedése úgy, hogy ha $S, T \in \mathcal{N}$ és a $\Delta_T \cap C_S$ halmaz nemüres, akkor $S \subseteq T$. Legyen $\Pi : \Delta_N \to \Delta$ egy konvex halmazértékű leképezés zárt gráffal. Ekkor léteznek $x^* \in \Delta_N, \pi^* \in \Pi(x^*), \lambda^* \in \Delta_{\mathcal{N}}$, melyekre:*

$$x^* \in \bigcap_{S \in \mathcal{N}: \lambda_S^* > 0} C_S,$$

$$\pi_N^* = \sum_{S \in \mathcal{N}} \lambda_S^* \pi_S^*.$$

A fenti tétel helyességével kapcsolatban is felmerültek kételyeink, de később is előfordul, hogy egy előző tétel bizonyítására hivatkoznak, de szerintünk nem konstruálható meg a bizonyítás ahhoz analóg módon.

A Π-kiegyensúlyozottságot az alábbi módon definiálták:

6.3.2. Definíció. *Legyen adott egy V játék és egy $\Pi : \mathbb{R}^n \to \Delta$ konvex értékű leképezés zárt gráffal, és minden $x \in \mathbb{R}^n$ vektorhoz létezzen $\pi \in \Pi(x)$, hogy $\pi_N \gg 0$. A V játék Π-kiegyensúlyozott, ha minden olyan $x \in \mathbb{R}^n, \pi \in \Pi(x), \pi_N \gg 0, \lambda \in \Delta_{\mathcal{N}}$-ra, melyekre igaz:*

$$x \in \bigcap_{S \in \mathcal{N}: \lambda_S > 0} V(S)$$

$$\pi_N = \sum_{S \in \mathcal{N}} \lambda_S \pi_S,$$

akkor $x \in V(N)$.

A π-kiegyensúlyozottság egy fix $\pi \in \Delta$ elemre volt definiálva. A π-kiegyensúlyozottság a Π-kiegyensúlyozottság speciális esete, ha Π egyértékű és független a szétosztástól. A Π-kiegyensúlyozottságnál megengedjük a játékosoknak, hogy a szétosztástól függően válasszák meg a koalíciókon belüli szerepüket.

6.3.3. Állítás. *Legyen V egy játék. Tegyük fel, hogy létezik egy $\Pi : \mathbb{R} \to \Delta$ leképezés zárt gráffal, mellyel a V játék Π-kiegyensúlyozott. Ekkor $Core(V)$ nemüres.*

A bizonyítást nem közölték, a π-kiegyensúlyozottságnál a mag nem-ürességére vonatkozó elégségességnél használt bizonyításra hivatkoznak, a Gyenge K-K-M-S tétel felhasználásával.

Szerintünk nem rekonstruálható a bizonyítás, ezzel kapcsolatban beszéltünk az első szerzővel, aki megerősítette ezt, így az elégségességet csupán sejtésnek tekintjük. Próbálkoztunk ellenpélda keresésével, ám nem találtunk.

Az alábbi állítás a szükségességet mondja ki:

6.3.4. Állítás. *Predtetchinski és Herings (2004) Legyen V egy játék. Tegyük fel, hogy $Core(V)$ nemüres. Ekkor létezik egy $\Pi : \mathbb{R} \to \Delta$ leképezés zárt gráffal, mellyel a V játék Π-kiegyensúlyozott.*

A bizonyításhoz egy lemmát használunk:

6.3.5. Lemma. *Legyen V egy játék, és $S \in \mathcal{N}$. Ekkor*

1. *Minden $x \in \mathbb{R}^n$ vektorhoz létezik pontosan egy $t_S(x)$ valós szám, hogy $(x - t_S(x)\chi_S) \in \partial V(S)$;*

2. *a $t_S : x \to t_S(x)$ függvény folytonos;*

3. *$x \in V(S)$ akkor, és csak akkor, ha $t_S(x) \leq 0$; $x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{int}V(S)$ akkor és csak akkor, ha $t_S(x) \geq 0$.*

Bizonyítás. Definiáljuk a $g_S : \mathbb{R}^n \to \partial V(S), g_S(x) = x - t_S(x)\chi_S, x \in \mathbb{R}^n$ folytonos leképezést. Legyen $x^* \in Core(V)$. Definiáljuk a $\Pi : \mathbb{R}^n \to \Delta$ leképezést úgy, hogy a $\Pi(x)$ halmaz a $\Pi_S(x)$ halmazok Descartes szorzata, ahol

$$\Pi_S(x) = \{\pi_S \in \Delta_S \mid \pi_S \cdot g_S(x^*) = \pi_S \cdot g_s(x)\},$$

minden $S \in \mathcal{N}$ és $x \in \mathbb{R}^n$.

Ahhoz, hogy lássuk, hogy a $\Pi_S(x)$ halmaz nemüres figyeljük meg, hogy megkapható a $\Pi_S^-(x)$ és $\Pi_S^+(x)$ halmazok metszeteként, ahol:

$$\Pi_S^-(x) = \{\pi_S \in \Delta_S \mid \pi_S \cdot g_S(x^*) \leq \pi_S \cdot g_S(x)\},$$

$$\Pi_S^+(x) = \{\pi_S \in \Delta_S \mid \pi_S \cdot g_S(x^*) \geq \pi_S \cdot g_S(x)\}.$$

Ha a $\Pi_S^-(x)$ halmaz üres lenne valamely $x \in \mathbb{R}^n$ esetén, akkor minden $\pi_S \in \Delta_S$-re $\pi_S \cdot g_S(x^*) > \pi_S \cdot g_S(x)$ állna fent. Ekkor tehát ez az egyenlőtlenség állna fent a Δ_S szimplex minden csúcsára, így $g_S^i(x^*) > g_S^i(x), i \in S$.

Mivel $g_S(x^*) \in \partial V(S)$, adódna, hogy $g_S(x) \in \mathrm{int}V(S)$, ami ellentmondana g_S definíciójával. Hasonlóan belátható, hogy a $\Pi_S^+(x)$ halmaz sem üres. Továbbá mindkét halmaz zárt, és $\Pi_S^-(x) \cup \Pi_S^+(x) = \Delta_S$. A Δ_S halmaz összefüggő, így $\Pi_S^-(x) \cap \Pi_S^+(x)$ nem üres. A $\Pi_S(x)$ halmazok konvexitása definícióból következik.

Ahhoz, hogy a Π leképezés gráfjáról belássuk, hogy zárt, legyen $(x_{(k)}, \pi_{(k)})$ $\mathbb{R}^n \times \Delta$-beli pontok sorozata úgy, hogy $\pi_{(k)} \in \Pi((x_{(k)})$ és tartanak az $(x_{(0)}, \pi_{(0)})$ ponthoz. Ekkor az

$$\pi_{S(k)} \cdot g_S(x^*) = \pi_{S(k)} \cdot g_S(x_{(k)}), S \in \mathcal{N}$$

egyenlőség a sorozat minden tagjára fennáll. A g_S leképezések folytonossága miatt a határértékre is igaz:

$$\pi_{S(0)} \cdot g_S(x^*) = \pi_{S(0)} \cdot g_S(x_{(0)}), S \in \mathcal{N}.$$

Tehát $\pi_{(0)} \in \Pi(x_{(0)})$.

A következőkben belátjuk, hogy a V játék Π-kiegyensúlyozott. Legyenek $x \in \mathbb{R}^n$, $\pi \in \Pi(x), \lambda \in \Delta_{\mathcal{N}}$ olyanok, melyekre:

$$x \in \bigcap_{S \in \mathcal{N}: \lambda_S > 0} V(S),$$

$$\pi_N = \sum_{S \in \mathcal{N}} \lambda_S \pi_S.$$

A 6.3.5. Lemma (3)-as pontja alapján minden $S \in \mathcal{N}$-re, melyre $\lambda_S > 0$ a $t_S(x) \leq 0$. Mivel $x^* \notin \text{int}V(S)$, így $0 \leq t_S(x^*)$. Ebből következik, hogy minden $S \in \mathcal{N}$-re, melyre $\lambda_S > 0$ a következő egyenlőtlenségek állnak fent:

$$\pi_S \cdot x \leq \pi_S \cdot g_S(x)$$

$$= \pi_S \cdot g_S(x^*)$$

$$\leq \pi_S \cdot x^*.$$

Ezért

$$\pi_N \cdot x = \sum_{S \in \mathcal{N}: \lambda_S > 0} \lambda_S \pi_S \cdot x$$

$$\leq \sum_{S \in \mathcal{N}: \lambda_S > 0} \lambda_S \pi_S \cdot x^*$$

$$= \pi_N \cdot x^*$$

$$= \pi_N \cdot g_N(x^*)$$

$$= \pi_N \cdot g_N(x),$$

ahol a második egyenlőtlenség az $x^* = g_N(x^*)$ feltétel miatt igaz. $g_N(x)$ definíciója szerint adódik a $t_N(x) \leq 0$ egyenlőtlenség, tehát $x \in V(N)$. $\square$

Tehát a Π-kiegyensúlyozottság egyelőre egy szükséges feltétel az NTU-játék magjának nem ürességére. Az elégségességgel kapcsolatban konzultáltunk az első szerzővel, aki egyetértett velünk abban, hogy ennek az iránynak a bizonyítása nem jó.

7. fejezet

Konklúzió

Nem teljes szerződések modellezésére a kooperatív játékelméletet alkalmaztuk. Stabil szerződés létezik, ha a modell TUU-játék WS-magja nem üres. Egy konstrukció alapján, és ismert tételek használatával adtunk egy alternatív bizonyítást egy tételre, mely a WS-mag nem ürességére egy elégséges feltételt szolgáltat: ha az állapotonkénti TU^u-játékok konvexek, akkor a WS-mag nem üres. További elégséges feltételeket is adtunk: a konstruált NTU-játék magja ekvivalens az eredeti játék WS-magjával, így az NTU-játék magjának nem ürességére vonatkozó elégséges tételeket használhatjuk: kiegyensúlyozottság, π-kiegyensúlyozottság, ordinális konvexitás.

Szükséges és elégséges feltételt nem tudtunk adni, mivel a Π-kiegyensúlyozottság elégségességének bizonyítása hiányos, melyet az első számú szerző is megerősített. Így ezt csak sejtésnek tudjuk elfogadni. Példával szemléltettük, hogy a feltételek nem magától értetődőek: az állapotokból konstruált NTU-játékok π-kiegyensúlyozottsága nem elégséges feltétel a WS-mag nem ürességére.

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm témavezetőmnek, Dr. Pintér Miklósnak a diplomamunka elkészítésében nyújtott segítséget, rendkívül értékes tanácsait és türelmét.

Irodalomjegyzék

Aumann, R., Maschler, M. (1985) Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud. Journal of Economic Theory 36, 195-213.

Billera, L.J. (1970) Some theorems on the core of an n-person game without side-payments, SIAM Journal on Applied Mathematics 18, 567-579.

Bondareva, O.N. (1963) Some applications of linear programming methods to the theory of cooperative games, Problemy Kibernetiki 10, 119-139 (in Russian).

Csóka, P., Herings, P. J. J., Kóczy, L. Á., Pintér, M. (2011) Convex and exact games with non-transferable utility. European Journal of Operational Research 209, 57-62.

Gillies, D.B. (1959 Solutions to general non-zero-sum games. Tucker, A. W., Luce, R. D. :Contributions to the Theory of Games IV. (Annals of Mathematics Studies 40). Princeton: Princeton University Press 47-85.

Greenberg, J. (1985) Cores of convex games without side payments. Mathematics of Operations Research 10, 523-525.

Habis, H., Herings, P. J. J. (2011) Transferable Utility Games with Uncertainty. Journal of Economic Theory, 146(5), 2126-2139.

Habis, H., Herings, P. J. J. (2011) Stochastic Bankruptcy Games. Meteor, Maastrich University School of Business and Economics.

Ichiishi, T. (1981) Super-modularity: Applications to convex games and the greedy algorithm for LP. Journal of Economic Theory 25:283-286.

Kranich, L., Perea, A., Peters, H. (2005) Core concepts for dynamic TU games. Int. Game Theory Rev. 7 (1) (2005) 43-61.

Peleg, B., Sudhölter, P. (2003) Introduction to the Theory of Cooperative Games.

Predtetchinski, A., Herings, P. J. J. (2004) A necessary and sufficient condition for the non-emptiness of the core of a non-transferable utility game. Journal of Economic Theory 116, 84-92.

Ray, D. (1989) Credible Coalitions and the Core. International Journal of Game Theory, 18(2), 185-187.

Salanié, B. (2005) The Economics of Contracts (második kiadás), MIT Press

Scarf, H. (1967) The core of an n-person game, Econometrica 35, 50-69.

Shapley, L. S. (1967) On balanced sets and cores, Naval Res. Logist. Quart. 14, 453-460.

Shapley, L. S. (1971) Cores of convex games. International Journal of Game Theory 1, 11-26.

Shapley, L. S., Vohra, R. (1991) On Kakutani's fixed-point theorem, the K-K-M-S theorem and the core of a balanced game. Economic Theory, vol. 1, 108-116.

Sharkley, W. (1981) Convex games without side payments. International Journal of Game Theory 10, 101-106.

Vilkov, V. (1977). Convex games without side payments. Vestnik Leningradaskiva Universitata 7, 21-24 (in Russian).