

**MATEMATIKA BSC ZÁRÓVIZSGA**  
**ALGEBRA, ANALÍZIS, DISZKRÉT MATEMATIKA, GEOMETRIA TÉTELSOR**  
**2015. szeptembertől induló évfolyamok számára**

**ALGEBRA**

**1. Számelmélet**

Oszthatóság, egység, legnagyobb közös osztó definíciója. Maradékos osztás tétele, euklideszi algoritmus. Felbonthatatlan szám, prímszám, számelmélet alaptétele. Kongruencia definíciója, elemi tulajdonságai, maradékosztály, teljes és redukált maradékrendszer. Komplex számok, polinomok, az algebra alaptétele.

**2. Lineáris egyenletrendszerek**

Homogén és inhomogén lineáris egyenletrendszer, mátrix rangja, megoldhatóság feltétele, megoldások száma.  $\mathbb{R}^n$ , vektortér, altér, lineáris függetlenség, összefüggőség, bázis, dimenzió. Mátrix sor-, oszlop- és nulltere. Gauss-elimináció, elemi sorműveletek, lépcsős alak, redukált lépcsős alak. Mátrixműveletek és tulajdonságaik, mátrix inverze, transzponáltja.

**3. Lineáris transzformációk**

Lineáris leképezés fogalma, mátrix alakja, bázisátmenet. Sajátérték, sajátvektor, diagonalizáció. Az euklideszi skalárszorzat és norma. Ortogonális és szimmetrikus mátrixok. Kvadratikus alakok definitisége. Skalárszorzat a komplex számok és véges testek felett. Bilineáris formák, standard alak, főtengely-tétel.

**4. Mátrixfelbontások**

Jordan-féle normálalak, Cayley–Hamilton-tétel. Mátrixfelbontások: PLU, SVD, QR, spektrálfelbontás. A felbontási eljárások főbb lépései és egymással vett kapcsolatuk.

**5. Csoportelmélet**

Csoport, részcsoporthoz, normálosztó, faktorcsoporthoz, homomorfizmus, homomorfizmustétel. Elem és csoport rendje, Lagrange-tétel, Cauchy-tétel. Ciklikus csoport részcsoporthoz. Véges Abel-csoportok alaptétele, p-csoportok, Sylow-részcsoporthoz, Sylow-tételek.

**6. Polinomgyűrűk és testek**

Gyűrű, részgyűrű, ideál, faktorgyűrű. Test, karakterisztika, prímtest.  $\mathbb{F}[x]$ -ben és  $\mathbb{Z}$ -ben: maradékos osztás, főideálgyűrű, maximális ideálok és ezekkel vett faktorok. Testbővítés foka, szorzástétel, egyszerű algebrai bővítés egy adott testbővítésben, illetve ilyenek konstrukciója polinomgyűrű faktorgyűrűjeként. Transzcendens bővítés. Véges testek.

**ANALÍZIS**

**1. Differenciálás**

Egy- és többváltozós függvény differenciálhatósága. Parciális és iránymenti derivált. Deriválási szabályok. Inverzfüggvény tétel, implicitfüggvény-tétel. Szélsőérték-keresés. Primitív függvény keresésének technikái. Normált terek között ható leképezések deriválása.

**2. Integrálás egy- és többváltozóban**

Jordan-mérték, Riemann-integrál. Lebesgue-mérték, mérhető függvények, Lebesgue-integrál. Beppo-Levi tétel, Fatou-lemma, Lebesgue-féle majorált konvergencia tétel, {Fubini-tétel.}  $L_p$  terek. Görbementi integrál, felszíni integrál. Integrál-átalakító tételek.

**3. Komplex változós analízis**

Komplex differenciálhatóság, kapcsolata a kétváltozós differenciálhatósággal. Differenciálható függvények tulajdonságai. Komplex vonalintegrál. Cauchy-féle tételek és következményeik. Szingularitások osztályozása. Residuum, residuum-tétel. Komplex változós függvény Laurent-sora.

#### 4. **Sorok**

Numerikus sorok. Hatványsorok, konvergenciasugár, Cauchy-Hadamard-tétel. Függvénysorozatok és függvénysorok, pontonkénti és egyenletes konvergenciája és következményei. Taylor-sorfejtés hibataggal. Nevezetes függvények Taylor-sorai. Taylor-sorba fejthető függvények. Fourier-sorok: konvergencia-tételek.

#### 5. **Metrikus terek, normált terek**

Metrikus terek topológiája, teljes metrikus tér. Norma, normált terek között ható lineáris leképezések folytonossága, operátornorma. Korlátos lineáris operátorok és funkcionálok. Hahn-Banach tétel és néhány következménye. Banach-Steinhaus tétel. Nyílt leképezések tétele és zárt gráf-tétel. Banach tétele korlátos inverz létezéséről.

### GEOMETRIA

#### 1. **Konvex poliéderek**

- n-dimenziós konvex poliéder definíciója (félterek metszete vs csúcspont halmaz konvex burka)
- n-dimenziós szabályos poliéderek osztályozása
- 3-dimenziós Euler tétel, Platoni testek létezése

#### 2. **Nemeuklideszi geometriák**

- háromszög szögösszege és területe hiperbolikus és szférikus geometriában (Legendre tételek)
- modelltávolságok (kettősviszony)
- homogén koordináták és a valós projektív sík (Desargues tétel, Pappos tétel)

#### 3. **Görbék és felületek differenciálgeometriája a 3-dimenziós euklideszi térben**

- A görbeelmélet alaptétele, a felületelmélet alaptétele, theorema egregium és az ezekben szereplő fogalmak ismertetése.

### DISZKRÉT MATEMATIKA ÉS ALGORITMUSOK

#### 1. **Adatrendezési módszerek. A keresés alapvető módszerei, adatszerkezetei**

Kiválasztásos, beszúrásos, gyors-, összefésülős rendezések, alsó becslés rendezésnél az összehasonlítások számára, ládarendezés, radix rendezés. Bináris fa bejárások, bináris keresőfák, {piros-fekete-fák, 2-3-fák. } {Vödrös hashelés,} nyitott címzésű hashelés.

#### 2. **Legrövidebb utak gráfokban**

Szélességi keresés (BFS), Dijkstra, Ford és Floyd algoritmusai.

#### 3. **Minimális súlyú feszítőfák keresése gráfokban, maximális méretű párosítások keresése páros gráfokban, folyamok**

Minimális költségű feszítőfák fogalma, mohó algoritmus, Kruskal tétele. Páros gráfok fogalma, párosítás páros gráfban, Hall és Frobenius tétel, alternálóutas algoritmus. Hálózati folyamok, Ford-Fulkerson-tétel, javítóutas algoritmus.

#### 4. **Az NP fogalma, nevezetes NP-beli feladatok. NP-teljesség**

Az NP nyelvosztály, Karp-redukció, NP-teljesség, Cook-Levin-tétel, nevezetes NP-teljes nyelvek: 3SAT, HAM, 3SZÍN, MAXKLIKK, MAXFTL, RH, PARTÍCIÓ

#### 5. **Gráfok színezései és bejárásai, síkgráfok**

Gráfok színezése, kromatikus szám, klikkszám, alsó és felső korlátok a kromatikus számra. Élgráfok, élkromatikus szám, Vizing tétel, König tétel. Szélességi és mélységi bejárás, DAG. Síkgráfok, Euler formula, négyszíntétel, topologikus izomorfia, Kuratowski tétel, Fáry-Wagner tétel.