Felsőbb Matematika (2013-14) — 2. gyakorlat

1. Az a és b értékektől függően hány megoldása van az alábbi egyenletrendszernek? Adjuk meg a megoldásokat paraméteres alakban!

$$\begin{aligned} 2x+\ \ y+\ \ z &= 4 \\ x+2y-\ \ z &= -1 \\ x-\ \ y+2z &= a \\ x+by+\ \ z &= 3 \end{aligned}$$

Megoldás. Az egyenletrendszer kibővített mártixát kell Gauss-eliminálnunk:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & a \\ 1 & b & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & a \\ 1 & b & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & 3 & a+1 \\ 0 & b-2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & a-5 \\ 0 & b-2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & a-5 \\ 0 & b & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{\text{ha } b\neq 0}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & a-5 \end{bmatrix}$$

Tehát, ha $a \neq 5$, akkor nincs megoldás, ha $a = 5$ és $b = 0$, akkor ∞ sok megoldás van ($(x,y,z) = (3-t, -2+t, t)$), egyébként, azaz ha $a = 5$ és $b \neq 0$, akkor egyetlen ($(x,y,z) = (1,0,2)$).

2. Mennyi a $(2,3,0,-1)$, $(1,2,-1,0)$, $(2,4,-2,0)$, $(1,0,3,-2)$ vektorrendszer rangja? Adjunk meg maximális méretű lineárisan független részrendszert, és állítsuk elő a többit ezek lineáris kombinációjaként. Másként fogalmazva: válasszunk bázist e négy vektor által kifeszített altérben e vektorok közül, és írjuk fel a többi vektor e bázisra vonatkozó koordinátás alakját.

Határozzuk meg a fenti vektorok által kifeszített altér merőleges kiegészítő alterének egy bázisát.

Megoldás. A négy vektor mátrixán végezzünk elemi sorműveleteket:

$$[\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\mathbf{v}_3|\mathbf{v}_4] \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tehát a $(2,3,0,-1)$ és $(1,2,-1,0)$ bázist alkotnak, és a $\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_4 = 2\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2$, a koordinátás alakok: $(0,2)$, $(2,-3)$.

A merőleges kiegészítő altér egy bázisa a $(2,-1,0,1)$ és a $(-3,2,1,0)$ vektorokból áll.

3. Írjuk fel a $\mathcal{B} = \{(1,1,1),\ (1,2,3),\ (1,1,2)\}$ bázisról a $\mathcal{C} = \{(7,3,3),\ (8,1,2),\ (4,4,3)\}$ bázisra való áttérés mátrixát, és határozzuk meg a $(\mathbf{v})_\mathcal{B} = (3,2,1)$ vektor $\mathcal{C}$ bázisbeli alakját!

Megoldás. *1. megoldás:* A megadott vektorokból fölírhatók a két bázisból a standard bázisba való áttérés mátrixai:

$$\mathbf{A}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

amiből $\mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{E}}\mathbf{A}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathbf{A}^{-1}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}\mathbf{A}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$, amiből egy invertálás és egy mátrixszorzás után megkapható az áttérés mátrixa:

$$\mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 7 & 47 & 35 \\ -4 & -27 & -20 \\ -4 & -28 & -21 \end{bmatrix}$$

2. megoldás: Az áttérés mátrixának oszlopai a $\mathcal{B}$ bázis vektorainak $\mathcal{C}$ bázisban kifejezett alakjai. Ez egy szimultán egyenletrendszerből kapható meg:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 8 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 47 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -27 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -28 & -21 \end{array}\right]$$

Innen $[\mathbf{v}]_\mathcal{C} = \mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_\mathcal{B}$ elvégzésével kapjuk, hogy $(\mathbf{v})_\mathcal{C} = (150, -86, -89)$.

4. Mutassuk meg, hogy a konzisztens valós $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek pontosan egy sortérbe eső megoldása van, és az a legkisebb abszolút értékű (azaz legrövidebb) megoldás.

Megoldás. Csak egy sortérbe eső megoldás van: $\mathbf{Ax}_1 = \mathbf{b}$, $\mathbf{Ax}_2 = \mathbf{b} \rightsquigarrow \mathbf{A}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$.

Van megoldás a sortérben: $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\mathcal{S} + \mathbf{x}_\mathcal{N} \rightsquigarrow \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{A}(\mathbf{x}_\mathcal{S} + \mathbf{x}_\mathcal{N}) = \mathbf{Ax}_\mathcal{S} = \mathbf{b}$.

Ez a legkisebb abszolút értékű: $|\mathbf{x}|^2 = |\mathbf{x}_\mathcal{S}|^2 + |\mathbf{x}_\mathcal{N}|^2 \geq |\mathbf{x}_\mathcal{S}|^2 \rightsquigarrow |\mathbf{x}| \geq |\mathbf{x}_\mathcal{S}|$

5. Határozzuk meg az alábbi egyenletrendszerek sortérbe eső egyetlen megoldását, és ezt felhasználva összes megoldását!

a)
$$\begin{aligned} x+\ \ y+z &= 3 \\ 2x+\ \ y-z &= 2 \\ 3x+2y\qquad &= 5 \end{aligned}$$

b) $x + 4y + 8z + 12w = 15$

c)
$$\begin{aligned} x+y+z+w &= 3 \\ x+y-z-w &= 1 \end{aligned}$$

Megoldás. *a)* Az egyenletrendszer redukált lépcsős alakja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix},$$

ahonnan a nullteret kifeszítő vektor $(2,-3,1)$. A rá való merőlegességet leíró egyenletet az egyenletrendszerhez írva a megoldás $z_0 = 1$, ahonnan $x_0 = 1$ és $y_0 = 1$. Az általános megoldás $(x,y,z) = (1,1,1) + t(2,-3,1)$

b) Nulltér: $(12,0,0,-1)$, $(0,3,0,-1)$, $(0,0,3,-2)$. A sortérbe eső megoldás az $\mathbf{x}_0 = 1/15(1,4,8,12)$ vektor, az összes megoldás $\mathbf{x}_0 + t(12,0,0,-1) + u(0,3,0,-1) + v(0,0,3,-2)$.

c) Redukált lépcsős alak:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Nulltér: $(1,-1,0,0)$, $0,0,1,-1)$. Sortérbe eső megoldás: $(1,1,1/2,1/2)$.

6. Legyenek $V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ alterek. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$\dim\langle V \cup W\rangle = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W).$$

Megoldás. Válasszunk bázist a metszethez, ezt egészítsük ki V és W bázisává. Bizonyítsuk be, hogy a megadott vektorok összesége a generátum bázisát adja.

7. *Sherman – Morrison-formula* Tegyük fel, hogy az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix invertálható, és $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ két olyan vektor, hogy $1 + \mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u} \neq 0$. Ekkor $\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T$ invertálható, és

$$\left(\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T\right)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}.$$

Megoldás. Jegyzet 5.34. tétel.

8. Tegyük fel, hogy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ és $\det \mathbf{A} = 3$. Határozzuk meg a $2\mathbf{A}^{-1}$, $(2\mathbf{A})^{-1}$ és $\mathbf{A}^2\mathbf{A}^T\mathbf{A}^{-1}$ mátrixok determinánsát!

Megoldás. $|2\mathbf{A}^{-1}| = 2^5|\mathbf{A}^{-1}| = 2^5\frac{1}{|\mathbf{A}|} = \frac{2^5}{3}$
$|(2\mathbf{A})^{-1}| = \frac{1}{|2\mathbf{A}|} = \frac{1}{2^5|\mathbf{A}|} = \frac{1}{2^5 3}$
$|\mathbf{A}^2\mathbf{A}^T\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}^2||\mathbf{A}^T||\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^2|\mathbf{A}||\mathbf{A}|^{-1} = |\mathbf{A}|^2 = 9$

9. Melyek igazak az alábbi állítások közül? (Az $\mathbf{A}$ itt mindig négyzetes mátrixot jelöl.)
(a) Ha egy determináns értéke 0, akkor van két azonos sora.
(b) Ha egy determináns értéke nem 0, akkor oszlopvektoriai lineárisan függetlenek.
(c) Ha az $\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása, akkor $|\mathbf{A}| \neq 0$.
(d) $|\mathbf{A}| \neq 0$ pontosan akkor igaz, ha az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer nem oldható meg.
(e) $|\mathbf{A}| = 0$ pontosan akkor igaz, ha az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer egyértelműen megoldható.

10. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{D}$ invertálható mátrixok, akkor a következő ún. blokkdiagonális mátrixok invertálhatók, és

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{D}\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{D}^{-1}\end{bmatrix},$$

illetve

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{O} & \mathbf{D}\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}\mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\\ \mathbf{O} & \mathbf{D}^{-1}\end{bmatrix}.$$

ahol $\mathbf{B}$ tetszőleges, de megfelelő típusú mátrix. Hasonlóan, ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{D}$ négyzetes mátrixok, akkor

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}\mathbf{X} & -\mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{X} & \mathbf{D}^{-1} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{X} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1}$, és feltételezzük, hogy minden felírt mátrixinverz létezik. Ezt felhasználva számítsuk ki az alábbi mátrix inverzét:

$$\begin{bmatrix}2 & 3 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Megoldás. A képletek egyszerű behelyettesítéssel ellenőrizhetők. Az inverz:

$$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

11. Legyen $\mathbf{A}$ egy 10×10-es valós mátrix. Jelölje r_i az $\mathbf{A}^i$ rangját. Lehet-e az $(r_1, r_2, \ldots)$ sorozat egyenlő az alábbiakkal? (a) $(5, 6, \ldots)$, (b) $(9, 8, 7, \ldots, 4, 4 \ldots)$, (c) $(10, 9, 8, \ldots)$, (d) $(8, 5, \ldots)$.

Megoldás. Az $\mathbf{A}$ rangja megegyezik az $A : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ leképezés képterének dimenziójával, az $\mathbf{A}^i$ rangja az A^{i-1} képtere A általi képének dimenziójával.
(a) Az A leképezés az $\mathbb{R}^{10}$ teret egy 5-dimenziós részébe képzi, így ez az altér saját magába képződik, tehát nem lehet 5-nél több dimenziós: ez a sorozat nem lehetséges.
(b) Ha A a tér bázisán az alábbi módon hat, a rangok a megkívánt sorozatot adják: $\mathbf{e}_6 \mapsto \mathbf{e}_5 \mapsto \mathbf{e}_4 \mapsto \mathbf{e}_3 \mapsto \mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{0}$, és $\mathbf{e}_7$, $\mathbf{e}_8$, $\mathbf{e}_9$, $\mathbf{e}_{10}$ helyben maradnak. E leképezés mátrixa és annak hatványai is könnyen felírhatók.
(c) Ha $\mathbf{A}$ rangja 10, akkor determinánsa nem 0, így hatványaié sem, vagyis 10-zel csak a $10, 10, \ldots$ sorozat kezdődik.
(d) Ha $\mathbf{A}$ rangja 8, akkor magterének dimenziója 2, így egy 8-dimenziós tér képe legalább 6. E sorozat nem lehetséges.

12. Igazoljuk, hogy minden r-rangú mátrix előáll r darab 1-rangú összegeként.

Megoldás. Útmutatás: mutassuk meg, hogy minden 1-rangú mátrix előáll diadikus szorzatként, majd pl. használjuk a bázisfelbontást.

13. Tegyük fel, hogy az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixra $\mathbf{A}^2 = \mathbf{O}$. Mutassuk meg, hogy rangja legföljebb $n/2$.

Megoldás. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{O}(\mathbf{A}) \subseteq \mathcal{N}(\mathbf{A})$ (az oszloptér része a nulltérnek), és használjuk a dimenziótételt.

14. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$-es, akkor $\mathrm{r}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A})$.

Megoldás. Elég megmutatni, hogy $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}$ nulltere megegyezik:
$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{0} = \mathbf{0}$
$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \rightsquigarrow (\mathbf{A}\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{A}\mathbf{x}) = 0 \rightsquigarrow \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$

HF. Keressünk egy bázist az $\mathbb{R}^4$ tér $x+y+z+w = 0$ egyenletű hipersíkjával párhuzamos vektorok alterében, és írjuk fel e hipersík egy – a bázisvektoroktól különböző – vektorának e bázisra vonatkozó koordinátás alakját!