Felsőbb Matematika (2012-13 ősz) 7. gyakorlat

1. Számítsuk ki az alábbi vektorok megadott normáit!
1. $\mathbf{x} = (\sqrt{3} - \mathrm{i}, 6\mathrm{i}, 3)$, $\mathbf{y} = (0.1, -0.2, -0.2)$, $p = 1, 2, \infty$;
2. $(1,2,2)$, $(2,3,6)$, $(1,4,8)$, $(4,4,7)$, $p = 2$;
3. $(\mathrm{i}, 2, \sqrt{2} - \sqrt{2}\mathrm{i}, -4i)$, $p = 1, 2, \infty$;
4. $(3,4,5)$, $(11,12,13,14)$, $p = 3$;

Megoldás. 1. $\|\mathbf{x}\|_1 = 11$, $\|\mathbf{x}\|_2 = 7$, $\|\mathbf{x}\|_\infty = 6$, $\|\mathbf{y}\|_1 = 0.5$, $\|\mathbf{y}\|_2 = 0.3$, $\|\mathbf{x}\|_\infty = 0.2$.
2. Ezek az úgynevezett Pitagorászi számnégyesekből képzett vektorok, amelyekben a koordináták négyzetösszege négyzetszám, így a 2-normájuk egész. A normák 3, 7, 9, 9.
3. 9, 5, 4;
4. 6, 20;

2. Számítsuk ki az alábbi mátrixok Frobenius-, 1-, 2- és ∞-normáját!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Megoldás. $\|\mathbf{A}\|_F = 5$, $\|\mathbf{A}\|_1 = 6$, $\|\mathbf{A}\|_2 = 5$, $\|\mathbf{A}\|_\infty = 6$.
$\|\mathbf{B}\|_F = 5$, $\|\mathbf{B}\|_1 = 7$, $\|\mathbf{B}\|_2 = 5$, $\|\mathbf{B}\|_\infty = 4$.
$\|\mathbf{C}\|_F = \sqrt{13}$, $\|\mathbf{C}\|_1 = 4$, $\|\mathbf{C}\|_2 = 3$, $\|\mathbf{C}\|_\infty = 4$.

3. Számítsuk ki az alábbi mátrixok Frobenius-, 1-, 2- és ∞-normáját!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Megoldás. $\|\mathbf{A}\|_F = 9$, $\|\mathbf{A}\|_1 = 8$, $\|\mathbf{A}\|_2 = 8$, $\|\mathbf{A}\|_\infty = 8$.
$\|\mathbf{B}\|_F = 3\sqrt{3}$, $\|\mathbf{B}\|_1 = 5$, $\|\mathbf{B}\|_2 = 3$, $\|\mathbf{B}\|_\infty = 5$.
$\|\mathbf{C}\|_F = 3\sqrt{3}$, $\|\mathbf{C}\|_1 = 5$, $\|\mathbf{C}\|_2 = 5$, $\|\mathbf{C}\|_\infty = 5$.

4. Igazoljuk, hogy tetszőleges mátrixnormára $\rho(\mathbf{A}) \leq \|\mathbf{A}\|$,ahol $\rho(\mathbf{A})$ az $\mathbf{A}$ spektrálsugara.

Megoldás. Ha λ egy tetszőleges sajátértéke $\mathbf{A}$-nak, és $\mathbf{x}$ a hozzá tartozó egyik sajátvektor, azaz $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$, akkor

$$\mathbf{Axx}^* = \lambda\mathbf{xx}^* \rightsquigarrow \|\mathbf{A}\| \, \|\mathbf{xx}^*\| \geq \|\mathbf{Axx}^*\| = |\lambda| \, \|\mathbf{xx}^*\| \, ,$$

és mivel $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, így $\mathbf{xx}^* \neq \mathbf{O}$, azaz $\|\mathbf{xx}^*\| \neq 0$, vagyis leosztva vele $|\lambda| \leq \|\mathbf{A}\|$ adódik. Ez minden sajátértékre, így a spektrálsugárra is igaz.

5. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{A}$ normális ($\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^*$), akkor $\|\mathbf{A}\|_2 = \rho(\mathbf{A})$.

Megoldás. Ha $\mathbf{A}$ normális, akkor unitéren hasonló egy diagonális $\mathbf{D}$ mátrixhoz, azaz $\mathbf{A} = \mathbf{QDQ}^*$ valamely unitér $\mathbf{Q}$ mátrixszal. Ekkor $\mathbf{A}^*\mathbf{A} \sim \mathbf{D}^*\mathbf{D}$ is fönnáll, ugyanis $\mathbf{A}^*\mathbf{A} = (\mathbf{QDQ}^*)^*(\mathbf{QDQ}^*) = \mathbf{QD}^*\mathbf{DQ}^*$, tehát $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ és $\mathbf{D}^*\mathbf{D}$ sajátértékei megegyeznek. Másrészt $\mathbf{D}^*\mathbf{D}$ minden sajátértéke $|\lambda|^2$ alakú, ahol λ az $\mathbf{A}$ valamely sajátértéke. Összegezve: mivel $\|\mathbf{A}\|_2 = \sigma_1$, azaz az $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ legnagyobb sajátértékének gyöke, ami viszont megegyezik $\mathbf{A}$ legnagyobb sajátértékével, azaz a $\rho(\mathbf{A})$ spektrálsugárral.

6. Hozzuk ortogonális hasonlósági transzformációval felső háromszögalakra az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & -3 \\ 3 & 17 & -6 \\ -12 & 14 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrixot!

Megoldás. A karakterisztikus polinom $-x^3 + 28x^2 - 245x + 686 = (7-x)^2(14-x)$. A 7 kétszeres sajátérték, a sajátaltér 1-dimenziós, sajátvektor $\mathbf{x}_1 = (2,3,6)$, a 14-hez tartozó sajátvektor $\mathbf{x}_2 = (9,17,13)$, diagonalizálni nem lehet.

Az első sajátvektorhoz választunk egy ortonormált bázist, abból képezzük az $\mathbf{U}_1$ és az $\mathbf{U}_1^T\mathbf{A}\mathbf{U}_1$ mátrixot:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{U}_1 = [\mathbf{x}_1|\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_3] = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -6 & 3 \\ 3 & -2 & -6 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U}_1^T\mathbf{A}\mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -21 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 7 & 7 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & * & \dots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{A}_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

tehát

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$$

A 7 sajátértékhez tartozó sajátvektor $(0, 1)$, rá merőleges a $(1, 0)$. Így

$$\mathbf{U}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_2 = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{U}_2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Innen

$$\mathbf{U} = \mathbf{V}_1\mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} 2/7 & 3/7 & -6/7 \\ 3/7 & -6/7 & -2/7 \\ 6/7 & 2/7 & 3/7 \end{bmatrix} \text{ és } \mathbf{U}^T\mathbf{A}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 7 & -21 & 0 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}$$

7. Írjuk fel az $\mathbf{A}$ mátrixot $\mathbf{QUQ}^T$ alakba, ahol $\mathbf{Q}$ ortogonális, $\mathbf{U}$ felső háromszögmátrix.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 14 & -9 \\ 0 & 16 & -10 \end{bmatrix}$$

Megoldás. A jobb alsó 2×2-es mátrix sajátértéke $\lambda = 2$. A sajátvektor $^1/_5(3, 4)$. Kiegészítjük teljes bázissá, a bázistranszformáció mátrixa:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

A felsőháromszög-mátrix:

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q}'\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -25 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

8. Legyen d_i az $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^i$ nullterének dimenziója, $i = 1, 2, \ldots, s$, ahol s a maximális kitevő. Képezzük a $d_i' = d_i - d_{i-1}$ és abból a $d_i'' = d_i' - d_{i+1}'$ (legyen $d_0 = d_{s+1}' = 0$). Mi a d' és a d'' sorozat elemeinek jelentése?

Megoldás. $d_i' = d_i - d_{i-1}$ a legalább i-hosszú Jordan-láncok száma, $d_i'' = d_i' - d_{i+1}'$ a pontosan i-hosszú Jordan-láncok száma.

9. Bizonyítsuk be, hogy minden mátrix hasonló a transzponáltjához.

Megoldás. *1. bizonyítás:* Mivel az $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^i$ és az $(\mathbf{A}' - \lambda\mathbf{I})^i = ((\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^i)'$ mátrixok nullterének dimenziói megegyeznek, ezért $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}'$ Jordan-normálalakjai megegyeznek, tehát a mátrixok hasonlóak.

2. bizonyítás: Egy Jordan-blokk transzponáltját kapjuk, ha balról és jobbról is szorozzuk azzal az S mátrixszal, melynek mellékátlójában egyesek, egyebütt nullák vannak. Mivel $S^{-1} = S$, ezért minden Jordan-blokk hasonló a transzponáltjához. Ebből következik, hogy minden Jordan-féle normálalakú mátrix hasonló a transzponáltjához, amiből következik az állítás.

10. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix Jordan-féle normálalakját, $\mathbf{J}$-t, és az $\mathbf{A}^{100}$, $e^{\mathbf{J}}$, $e^{3\mathbf{A}}$ mátixokat. *a)* $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ *d)* $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Megoldás. *a)* A mátrix sajátértékei és sajátvektorai: az 1 sajátértékhez tartozik a $(-1, 1, 0)$ és a $(-1, 0, 1)$, míg a 0 sajátértékhez a $(-1, 1, 1)$ sajátvektor. E vektorok lineárisan függetlenek, a belőlük alkotott bázisban a mátrix diagonális alakot ölt, melynek főátlójában a sajátértékek vannak. Az eredeti és a diagonális mátrix hasonló, a hasonlóság $\mathbf{C}$ mátrixa a sajátvektorokból áll. Ez és ennek inverze:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Így tehát

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tudjuk, hogy ha az f hatványsor konvergenciatartományának belsejében tartalmazza az $\mathbf{A}$ mátrix spektrumát, és $\mathbf{A} = \mathbf{CJC}^{-1}$, ahol $\mathbf{J}$ az $\mathbf{A}$ Jordan-féle normálalakja, akkor $f(\mathbf{A}) = \mathbf{C}f(\mathbf{J})\mathbf{C}^{-1}$. Itt $f(\mathbf{J})$ úgy kapható meg, hogy

$\mathbf{J}$ minden Jordan-blokkjára alkalmazzuk az f függvényt. Mivel e feladatban minden Jordan-blokk 1×1-es, hisz a normálalak diagonális, ezért csak a főátló elemeire kell alkalmazni f-et. Eszerint

$$\begin{bmatrix}2&1&1\\-1&0&-1\\-1&-1&0\end{bmatrix}^{100}=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1^{100}&0&0\\0&1^{100}&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&-1\\-1&-1&0\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&1\\-1&0&-1\\-1&-1&0\end{bmatrix}.$$

Az eredmény meglepő, de ha csak $\mathbf{A}^2$-et kiszámoltuk volna, láthattuk volna, hogy $\mathbf{A}^n=\mathbf{A}$ minden pozitív egész n-re. Bár ezt az eredményt az $e^{3\mathbf{A}}$ kiszámításánál is fölhasználhatnánk, kövessük a fent vázolt utat:

$$e^{\mathbf{J}}=\begin{bmatrix}e^1&0&0\\0&e^1&0\\0&0&e^0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e&0&0\\0&e&0\\0&0&1\end{bmatrix},\qquad e^{3\mathbf{J}}=\begin{bmatrix}e^3&0&0\\0&e^3&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

és az utóbbi mátrixot felhasználva

$$e^{3\mathbf{A}}=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}e^{3\mathbf{J}}\begin{bmatrix}-1&0&-1\\-1&-1&0\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2e^3-1&e^3-1&e^3-1\\1-e^3&1&1-e^3\\1-e^3&1-e^3&1\end{bmatrix}.$$

b) Először meghatározzuk a sajátértékeket a hagyományos módon, azaz a karakterisztikus polinommal (az első sort levonjuk a többi sorból, majd az összes oszlopot hozzáadjuk az első oszlophoz):

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&1&\dots&1\\1&1-\lambda&\dots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\dots&1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1&\dots&1\\\lambda&-\lambda&0&\dots&0\\\lambda&0&-\lambda&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\lambda&0&0&\dots&-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}n-\lambda&1&1&\dots&1\\0&-\lambda&0&\dots&0\\0&0&-\lambda&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\dots&-\lambda\end{vmatrix}$$

A karakterisztikus polinom 1 főegyütthatóval felírva: $(n-\lambda)\lambda^{n-1}$, tehát az n egyszeres, a 0 $(n-1)$-szeres sajátérték.

A csupa 1-esből álló $n\times n$-es $\mathbf{U}$ mátrix egyik sajátvektora a csupa 1-esből álló vektor, hisz $\mathbf{U}\cdot(1,1,\dots,1)=(n,n,\dots,n)$, és a hozzá tartozó sajátérték n. Másrészt $\mathbf{J}$ minden vektort $(k,k,\dots,k)$ alakú vektorba visz, azaz a képtér 1-dimenziós, így a magtér $(n-1)$-dimenziós. Eszerint a 0 sajátértékhez tartozó sajátaltér $(n-1)$-dimenziós, így kiválasztható a sajátvektorok közül egy ortonormált rendszer. A sajátvektorokból, mint oszlopokból képzett mátrix legyen $\mathbf{C}$, ennek első oszlopa legyen az egységnyi $(\frac{1}{\sqrt{n}},\dots,\frac{1}{\sqrt{n}})$. Mivel $\mathbf{C}$ ortogonális, ezért inverze $\mathbf{C}^T$. A normálalak egyet kivéve minden eleme 0, ezért a $\mathbf{C}$ mátrixnak csak egyetlen sora befolyásolja az eredményt. Tehát

$$\mathbf{U}^{100}=\mathbf{C}\mathbf{J}^{100}\mathbf{C}^T=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{n}}&?&\dots&?\\\frac{1}{\sqrt{n}}&?&\dots&?\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\frac{1}{\sqrt{n}}&?&\dots&?\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n^{100}&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{n}}&\frac{1}{\sqrt{n}}&\dots&\frac{1}{\sqrt{n}}\\?&?&\dots&?\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\?&?&\dots&?\end{bmatrix}=n^{99}\mathbf{U}$$

Hasonlóképp általában $\mathbf{U}^m=n^{m-1}\mathbf{U}$. Az $e^{\mathbf{J}}$ bal felső sarkában e^n áll, főátlójában 1-esek, egyebütt 0. Az $e^{3\mathbf{J}}$ hasonló, csak ott a sarokban e^{3n} áll. Ebből az $e^{3\mathbf{A}}$ már az előzőkhöz hasonlóan kapható meg, ha $e^{3\mathbf{J}}$-t felbontjuk egy $K+I$ összegre.

c) E mátrix háromszög alakú, így főátlójából leolvasható a karakterisztikus polinom: $(\lambda-2)^2(\lambda+5)$. A 2-höz tartozó sajátvektor $(1,0,0)$, a -5-höz tartozó $(-9/7,0,1)$, ezért a Jordan-mátrix alakja $\mathbf{J}=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&-5\end{bmatrix}$.

Keresünk egy harmadik bázisvektort, jelölje (x,y,z). Ekkor a $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&x&-9/7\\0&y&0\\0&z&1\end{bmatrix}$ mátrixra igaz, hogy $\mathbf{A}=\mathbf{B}\mathbf{J}\mathbf{B}^{-1}$, azaz $\mathbf{A}\mathbf{B}=\mathbf{B}\mathbf{J}$. Ebből a $\mathbf{B}$-ben lévő ismeretlenekre megoldható egyenletrendszert kapunk, egy megoldás: $x=z=0$, $y=1/3$, ennek inverze $\mathbf{B}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&9/7\\0&3&0\\0&0&1\end{bmatrix}$. Mivel $(x^{100})'=100x^{99}$, $(e^x)'=e^x$, $(e^{3x})'=3e^{3x}$, ezért

$$\mathbf{J}^{100}=\begin{bmatrix}2^{100}&100\cdot 2^{99}&0\\0&2^{100}&0\\0&0&5^{100}\end{bmatrix},\quad e^{\mathbf{J}}=\begin{bmatrix}e^2&e^2&0\\0&e^2&0\\0&0&e^{-5}\end{bmatrix},\quad e^{3\mathbf{J}}=\begin{bmatrix}e^6&3e^6&0\\0&e^6&0\\0&0&e^{-15}\end{bmatrix}.$$

Innen az $\mathbf{A}^{100}=\mathbf{B}\mathbf{J}^{100}\mathbf{B}^{-1}$ és $e^{3\mathbf{A}}=\mathbf{B}e^{3\mathbf{J}}\mathbf{B}^{-1}$ felhasználásával

$$\mathbf{A}^{100}=\begin{bmatrix}2^{100}&100\cdot 3\cdot 2^{99}&\frac{9}{7}(2^{100}-5^{100})\\0&2^{100}&0\\0&0&5^{100}\end{bmatrix},\quad e^{3\mathbf{A}}=\begin{bmatrix}e^6&9e^6&\frac{9}{7}(e^6-e^{-15})\\0&e^6&0\\0&0&e^{-15}\end{bmatrix}.$$

d) Először is $\mathbf{A}^{100}$ könnyen számolható, hisz néhány hatványozás után látszik, hogy $\mathbf{A}^3 = I$, így $\mathbf{A}^{99} = I$, tehát $\mathbf{A}^{100} = \mathbf{A}$. De a további kérdésekhez nem kerülhetjük el a karakterisztikus egyenlet meghatározását, ami $-\lambda^3 + 1 = 0$, azaz $\lambda^3 = 1$, aminek a harmadik egységgyökök a megoldásai, azaz az $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ jelöléssel a három sajátérték: $\varepsilon^0 = 1$, ε és $\varepsilon^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. A sajátértékekhez tartozó sajátvektorok, az áttérés $\mathbf{C}$ mátrixa és a $\mathbf{C}^{-1}$ mátrix:

$$1: \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \quad \varepsilon: \begin{bmatrix}\varepsilon^2\\\varepsilon\\1\end{bmatrix}, \quad \varepsilon^2: \begin{bmatrix}\varepsilon\\\varepsilon^2\\1\end{bmatrix}, \quad \text{így } \mathbf{C} = \begin{bmatrix}1 & \varepsilon^2 & \varepsilon\\1 & \varepsilon & \varepsilon^2\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}, \text{ és } \mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\\varepsilon & \varepsilon^2 & 1\\\varepsilon^2 & \varepsilon & 1\end{bmatrix}.$$

Itt a számolásokban kihasználhatjuk, hogy $\varepsilon^3 = 1$ és $\varepsilon^2 = -\varepsilon - 1$. Mivel $\mathbf{J}$ diagonális mátrix, konkrétan $\mathbf{J} = \operatorname{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon^2)$, így azonnal adódik, hogy $\mathbf{J}^{100} = \operatorname{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon^2)$, hisz $\varepsilon^{100} = \varepsilon$. Innen is kijön, csak bonyolultan, hogy $\mathbf{A}^{100} = \mathbf{C}\mathbf{J}^{100}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{A}$. Hasonlóképp $e^{\mathbf{J}} = \operatorname{diag}(e, e^{\varepsilon}, e^{\varepsilon^2})$ és $e^{3\mathbf{J}} = \operatorname{diag}(e^3, e^{3\varepsilon}, e^{3\varepsilon^2}) = \operatorname{diag}(e^3, e^{-3/2}\cos\frac{3\sqrt{3}}{2} + ie^{-3/2}\sin\frac{3\sqrt{3}}{2}, e^{-3/2}\cos\frac{3\sqrt{3}}{2} - ie^{-3/2}\sin\frac{3\sqrt{3}}{2})$. Innen $e^{3\mathbf{A}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}a & b & c\\c & a & b\\b & c & a\end{bmatrix}$, ahol $a = e^3 + 2e^{-3/2}\cos\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $b = e^3 - e^{-3/2}\cos\frac{3\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}e^{-3/2}\sin\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $c = e^3 - e^{-3/2}\cos\frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}e^{-3/2}\sin\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

11. Ellenőrizzük Perron tételét az alábbi mátrixra:

$$\begin{bmatrix}6 & 1 & 1\\5 & 6 & 1\\6 & 4 & 4\end{bmatrix}$$

Megoldás. Sajátértékek: 10, 3, 3, jobb Perron-vektor: $(5/25, 9/25, 11/25)$, bal Perron-vektor: $(4/7, 2/7, 1/7)$.

12. Mutassuk meg, hogy ha az $\mathbf{A} > \mathbf{O}$ mátrix minden oszlopában c az elemek összege, akkor c a spektrálsugár.

Megoldás. Az $\mathbf{A}^T$-nak az $\mathbf{1}$ vektor sajátvektora, c sajátértékkel. Mivel $\mathbf{1} > \mathbf{0}$, ezért ez csak a bal Perron-vektor n-szerese lehet, és akkor c a hozzá tartozó sajátérték, így c a spektrálsugár.

13. Határozzuk meg, hogy az alábbi mátrixok irreducibilisek vagy reducibilisek! A reducibilisekhez határozzuk meg a permutációs mátrixot is!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&1\\1&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0&1\\0&0&1&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

Megoldás. Az $\mathbf{A}$ reducibilis, a $\mathbf{B}$ irreducibilis, a permutációs mátrix és a szimmetrikusan permutált $\mathbf{A}$ mátrix:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P} = \left[\begin{array}{ccc|cccc}0&0&1&0&0&0&1\\1&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\end{array}\right]$$

HF. Melyik mátrix primitív az alábbiak közül?

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix}0&12&0&0&0\\0&0&0&24&25\\31&0&0&0&0\\0&0&43&0&0\\0&52&0&54&0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix}0&12&0&0&0\\0&0&23&0&0\\0&0&0&34&35\\41&0&0&0&0\\0&0&53&0&0\end{bmatrix}.$$

HF. Egy 10×10-es $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Az $\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 8, 6, 5, 4, 4. Az $\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 7, 6, 6. Írjuk fel $\mathbf{A}$ Jordan-alakját!