Felsőbb Matematika (2012-13 ősz) 5. gyakorlat

1. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ oszlopai lineárisan függetlenek, és $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ a QR-felbontás, akkor az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszerhez tartozó normálegyenlet-rendszer $\mathbf{Rx} = \mathbf{Q}^T\mathbf{b}$, aminek $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T\mathbf{b}$ az optimális megoldása.

Megoldás. behelyettesítés, trivi

2. Hogyan illesztenénk mért (t_i, y_i) adatpárokra egy $y = Ae^{\alpha t} + B\cos\beta t + C\sin\beta t$ alakú görbét, ha α és β ismert paraméterek, és A, B és C értékére kell optimális (legkisebb négyzetek elvének megfelelő) becslést adni. Írjuk fel az egyenletrendszert és a hozzá tartozó normálegyenletet-rendszert.

Megoldás. $\mathbf{M}$ i-edik sora $(e^{\alpha t_i}, \cos\beta t_i, \sin\beta t_i)$, az egyenletrendszer $\mathbf{M}\begin{bmatrix}A\\B\\C\end{bmatrix} = \mathbf{Y}$. Beszorozni $\mathbf{M}^T$-vel.

3 (QR-felbontás Givens-forgatásokkal)**.** Számítsuk ki az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}4 & 5 & 8\\ 3 & 10 & 6\\ 0 & 12 & 13\end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontását Givens-forgatások segítségével!

Megoldás. Először az első és második sorokat és oszlopokat figyelve elimináljuk a második sor első elemét. Itt $a = 4$, $b = 3$, tehát $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$. Így első lépésben a következő mátrixszorzással eliminálhatunk:

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix}\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0\\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad \mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix}5 & 10 & 10\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 12 & 13\end{bmatrix}.$$

Következő lépésben a $\mathbf{Q}_1\mathbf{A}$ mátrix harmadik sorának második elemét elimináljuk:

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{5}{13} & \frac{12}{13}\\ 0 & -\frac{12}{13} & \frac{5}{13}\end{bmatrix}. \qquad \mathbf{R} = \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix}5 & 10 & 10\\ 0 & 13 & 12\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}.$$

és innen

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1)^{-1} = \mathbf{Q}_1^T\mathbf{Q}_2^T = \begin{bmatrix}\frac{4}{5} & -\frac{3}{13} & \frac{36}{65}\\ \frac{3}{5} & \frac{4}{13} & -\frac{48}{65}\\ 0 & \frac{12}{13} & \frac{5}{13}\end{bmatrix},$$

amely mátrixokkal $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ valóban fennáll.

4 (QR-felbontás Householder-tükrözéssel)**.** Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 2 & -3\\ -2 & 5 & -7\end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontását Householder-módszerrel!

Megoldás. Az $(1, 2, -2) \mapsto (3, 0, 0)$ transzformációhoz az

$$\mathbf{a} = (1, 2, -2) - (3, 0, 0) = (-2, 2, -2)$$

vektorral Householder-tükrözést végzünk:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_1 = \mathbf{I}_3 - \frac{2}{\mathbf{a}'\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}' &= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} - \frac{1}{6}\begin{bmatrix}4 & -4 & 4\\ -4 & 4 & -4\\ 4 & -4 & 4\end{bmatrix}\\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 2 & -3\\ -2 & 5 & -7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & -2 & 3\\ 0 & 4 & -5\\ 0 & 3 & -5\end{bmatrix}$$

Ezután a $\mathbf{Q}_1\mathbf{A}$ mátrixból képzeletben elhagyva az első sort és oszlopot a $(4,3) \mapsto (5,0)$ transzformációhoz kell az $\mathbf{a} = (4,3) - (5,0) = (-1,3)$ vektorral Householder-tükrözést végezni:

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{I}_2 - \frac{2}{\mathbf{a}'\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_2 = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 4/5 & 3/5 \\ 0 & 3/5 & -4/5 \end{array}\right], \qquad \mathbf{R} = \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1)^{-1} = \mathbf{Q}_1'\mathbf{Q}_2' = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 5 & 2 & 14 \\ 10 & 10 & -5 \\ -10 & 11 & 2 \end{bmatrix}.$$

5. Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. $\mathbf{A}$ pszeudoinverzének segítségével (melyet az előző gyakorlaton már meghatároztunk) határozzuk meg az $\mathbf{A}\mathbf{x} = (10,2,6)$ egyenletrendszer legkisebb abszolút értékű optimális megoldását! Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix QR-felbontását, és ennek felhasználásával is keressük meg az előző egyenletrendszer legkisebb abszolút értékű optimális megoldását!

Megoldás. $\mathbf{A}^+\begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. A QR-felbontáshoz először a Gram–Schmidt-eljárással $\mathbf{A}$ első oszlopára merőleges vektort keresünk:

$$\mathbf{v}_1 = (2,-2,0), \quad \mathbf{v}_2 = (0,1,2) - \frac{(0,1,2)\cdot(2,-2,0)}{|(2,-2,0)|^2}(2,-2,0) = (0,1,2) - \frac{-2}{8}(2,-2,0) = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},2\right)$$

A $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ vektorok normáltjai lesznek $\mathbf{Q}$ oszlopai:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ -1 & 1/3 \\ 0 & 4/3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{R} = \mathbf{Q}^T\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1/2 & 1/6 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix} = \sqrt{2}\begin{bmatrix} 1/4 & 1/12 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T = \sqrt{2}\begin{bmatrix} 1/4 & 1/12 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 4/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/18 & -2/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 4/9 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T\begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

6. Ha $\mathbb{R}^n = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$, azaz $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ kiegészítő alterek, akkor a tér bármely $\mathbf{u}$ vektora egyértelműen előáll $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ alakban, ahol $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$. Az $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{v}$ leképezést vetítésnek vagy projekciónak nevezzük ($\mathbf{v}$ a $\mathcal{V}$-re $\mathcal{W}$ mentén való vetület). Határozzuk meg e transzformáció mátrixát!

Megoldás. A $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ dimenzióinak összege n, és ha $\mathcal{V}$ egy bázisa $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$, $\mathcal{W}$ egy bázisa $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_{n-r}\}$, akkor a két bázis diszjunkt (metszetük üres) és egyesítésük az egész tér egy bázisa. E vektorokból képezzük az alábbi mátrixot:

$$\mathbf{U} = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \ldots\ \mathbf{v}_r | \mathbf{w}_1\ \mathbf{w}_2\ \ldots\ \mathbf{w}_{n-r}] = [\mathbf{V}|\mathbf{W}].$$

Mivel $P\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i$ $(i = 1,2,\ldots,r)$ és $P\mathbf{w}_j = \mathbf{0}$ $(j = 1,2,\ldots,n-r)$, ezért a P leképezés $\mathbf{P}$ mátrixára

$$\mathbf{P}\mathbf{U} = \mathbf{P}[\mathbf{V}|\mathbf{W}] = [\mathbf{P}\mathbf{V}|\mathbf{P}\mathbf{W}] = [\mathbf{V}|\mathbf{O}].$$

Mivel pedig $\mathbf{U}$ invertálható, ezért a projekció mátrixa

$$\mathbf{P} = [\mathbf{V}|\mathbf{O}]\mathbf{U}^{-1} = [\mathbf{V}|\mathbf{O}][\mathbf{V}|\mathbf{W}]^{-1}.$$

7. Diagonalizáljuk ortogonálisan az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrixot és írjuk fel a spektrálfelbontását, azaz állítsuk elő $\mathbf{A} = \sum_\lambda \lambda\mathbf{P}_\lambda$ alakban, ahol $\mathbf{P}_\lambda$ a λ sajátértékhez tartozó sajátaltérre való merőleges vetítés mátrixa.

Megoldás. Karakterisztikus polinom: $-x^3 + 6x^2 - 9x$, innen $\lambda_{1,2} = 3$, $\mathbf{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$, a $(0,1,-1)$ sajátvektor ortogonalizálása után $\mathbf{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1)$, $\lambda_3 = 0$, $\mathbf{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. Ortogonálisan diagonalizáló mátrix:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

ahonnan $\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q} = \operatorname{diag}(3,3,0)$.

A spektrálfelbontás ortonormált vektorokkal, ahonnan az alterekre vetítő változat is megkapható:

$$\begin{aligned}3\mathbf{x}_1\mathbf{x}_1^T + 3\mathbf{x}_2\mathbf{x}_2^T + 0\mathbf{x}_3\mathbf{x}_3^T &= 3\cdot\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix} + 3\cdot\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 4 & -2\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix} + 0\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\\ &= 3\cdot\begin{bmatrix}2/3 & -1/3 & -1/3\\ -1/3 & 2/3 & -1/3\\ -1/3 & -1/3 & 2/3\end{bmatrix} +\end{aligned}$$

8. Számítsuk ki a k-adik Fibonacci-számot ($F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$)!

Megoldás. Mátrixegyenletbe írva:

$$\begin{bmatrix}F_{k+1}\\ F_k\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_k\\ F_{k-1}\end{bmatrix}$$

$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = \lambda^2-\lambda-1$, $\lambda_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, a sajátvektorok $\mathbf{x}_i = (\lambda_i, 1)$ $(i = 1,2)$. $\begin{bmatrix}F_{k+1}\\ F_k\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^n = \mathbf{C}\Lambda^n\mathbf{C}^{-1} &= \begin{bmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2}\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0\\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1 & -\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\ -1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{bmatrix}\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

amiből $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

9. Mutassuk meg, hogy az alábbi (valós) mátrixok mind hasonlók:

(a) $\begin{bmatrix}0 & a\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0 & b\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0 & 0\\ c & 0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0 & 0\\ d & 0\end{bmatrix}$, ahol a, b, c és d tetszőleges nem 0 értékek;

(b) $\begin{bmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1 & 0\\ c & 1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1 & 0\\ d & 1\end{bmatrix}$, ahol a, b, c és d tetszőleges nem 0 értékek;

(c) $\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & c\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & c\end{bmatrix}$, ahol $a \neq c$ tetszőleges, egymástól különböző értékek;

(d) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

Megoldás. (a) Új bázist adunk meg, amelyben az első leképezés mátrixa a második mátrix lesz. Az új bázist $\mathbf{e}_1$, $\alpha\mathbf{e}_2$ alakban keressük. Látható, hogy $\alpha = b/a$ megfelelő. A 3-4. mátrixhoz elég az elsőt transzponálni. Erre a mellékátlóban-csupa-1 mátrix jó.

(b) Az előző feladatbeli mátrixok realizálják a hasonlóságot itt is.

(c) Mindkét mátrixnak két sajátértéke van, az a és a c, így a hozzájuk tartozó sajátvektorokból álló bázisban az első mátrix diagonális lesz.

(d) Az $\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3$ vektorok bázist alkotnak, melyeket az első mátrix a második szerint képez le.

10. Számítsuk ki az alábbi mátrixok szinguláris érték szerinti felbontásának teljes és redukált alakját, és írjuk fel a hozzá tartozó diadikus felbontást!

$$(a)\ \begin{bmatrix}-\frac{4}{13} & 6\\ \frac{111}{13} & -4\end{bmatrix},\quad (b)\ \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad (c)\ \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},$$

$$(d)\ \begin{bmatrix}0 & -2 & 2\\ -2 & 3 & -2\\ 4 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

Megoldás. *(a)* a teljes és a redukált alakok megegyeznek,

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{bmatrix}73 & -36\\ -36 & 52\end{bmatrix},\ x^2-125x+2500,\quad \begin{array}{c}\lambda_1 = 100,\ \lambda_2 = 25,\\ \sigma_1 = 10,\ \sigma_2 = 5\end{array}\quad \mathbf{U} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix}-5 & 12\\ 12 & 5\end{bmatrix},\ \mathbf{V} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}4 & 3\\ -3 & 4\end{bmatrix}$$

(b) $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$-ból indulva $p(x) = x^3-4x^2+3x$, a sajátvektorok $\lambda = 3$: $(1,2,1)$, $\lambda = 1$: $(1,0,-1)$, $\lambda = 0$: $(1,-1,1)$. Innen a felbontás:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix},\quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix}\sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

A redukált felbontás

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

(c) Hasonlóan az előzőhöz:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix}\sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

(d) A teljes felbontás mátrixai:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 2\end{bmatrix}$$

a redukált felbontás:

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}6 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

11. Határozzuk meg a fenti mátrixok pszeudoinverzét!

Megoldás. *(a)* $\begin{bmatrix}2/25 & 3/25\\ 111/650 & 2/325\end{bmatrix}$, *(b)* $\begin{bmatrix}-1/3 & 2/3\\ 1/3 & 1/3\\ 2/3 & -1/3\end{bmatrix}$, *(d)* $\begin{bmatrix}-1/9 & 0 & 2/9\\ -1/9 & 1/9 & 0\\ 1/6 & -1/9 & -1/9\end{bmatrix}$

12. Határozzuk meg az (d)-beli mátrix polárfelbontását is!

Megoldás. $\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$

13. Tudjuk, hogy az $\mathbf{A} = \mathbf{U}\operatorname{diag}(4,-2,-2,0)\mathbf{U}^T$ az $\mathbf{A}$ mátrix sajátfelbontása, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

Írjuk fel $\mathbf{A}$ szinguláris felbontását!

Megoldás. Az $\mathbf{A} = \mathbf{U}\operatorname{diag}(4,2,2,0)\left(\operatorname{diag}(1,-1,-1,1)\mathbf{U}^T\right)$ az $\mathbf{A}$ szinguláris felbontása, azaz $\mathbf{V}^T$ úgy kapható meg $\mathbf{U}^T$-ból, ha második és harmadik sorát -1-gyel szorozzuk. A módszer tetszőleges sajátfelbontás esetén működik.

HF. Mi a geometriai jelentése a következő (ortogonális) mátrixok által meghatározott transzformációknak:

$$\text{(a)}\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 2\end{bmatrix}, \quad \text{(b)}\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ -1 & 2 & 2\end{bmatrix},$$

$$\text{(c)}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}?$$

HF. Írjuk fel az $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ mátrix szinguláris és redukált szinguláris felbontását!