1. Melyek igazak az $\mathbb{R}^n$ vektortér minden f lineáris transzformációjára?
1. $\mathbf{v}$ sajátvektora f-nek $\Longrightarrow$ $\mathbf{v}$ sajátvektora f^2-nek;
2. $\mathbf{v}$ sajátvektora f^2-nek $\Longrightarrow$ $\mathbf{v}$ sajátvektora f-nek;
3. 0 sajátértéke f^2-nek $\Longrightarrow$ 0 sajátértéke f-nek.

Megoldás.
1. $\mathbf{v}$ sajátvektora f-nek, azaz $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v} \Longrightarrow f^2(\mathbf{v}) = f(\lambda\mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{v}) = \lambda^2\mathbf{v}$, azaz $\mathbf{v}$ sajátvektora f^2-nek, az állítás igaz.
2. Hamis, például ha f a sík 90°-os elforgatása, akkor f^2 a 180°-os elforgatás, aminek a sík minden vektora sajátvektora, f-nek viszont nincs.
3. Igaz, hisz ha f-nek a 0 nem sajátértéke, azaz f egyik vektort sem viszi a nullvektorba, akkor f^2 sem.

2. Mondjunk egy lineáris leképezést, melynek sajátértékei (a) 1, 1, 1; (b) 1, 1, -1; (c) 1, -1, -1; (d)-1, -1, -1 (e) 1; (f) -1?

Megoldás. *(a)* identikus *(b)* síkra tükrözés *(c)* egyenesre tükrözés *(d)* origóra tükrözés *(e)* pl. az egyenes körüli forgatás *(f)* pl. a forgatva tükrözés

3. Adjuk meg az $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ altérre való merőleges vetítás mátrixát. Írjuk fel az $(1, 2, 0)$ vektort egy S-beli és egy rá merőleges vektor összegeként.

Megoldás. Elemi térgeometriával könnyen kiszámolhatóak az $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ és $(0, 0, 1)$ vektorok képei ennél a lineáris transzformációnál, a leképezés mátrixa ezen képvektorokból, mint oszlopokból álló mátrix.

4. Mutassuk meg, hogy egy $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix pontosan akkor egy k dimenziós altérre való merőleges vetítés mátrixa, ha $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ és $r(\mathbf{P}) = k$.

Megoldás. ld. jegyzet 299. o.

5. Határozzuk meg a következő mátrixok általánosított (pszeudo)inverzét:

$$(a)\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (b)\ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (c)\ \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (d)\ \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás.
(a) $r(\mathbf{A}) = 1$, a bázisfelbontás: $\mathbf{B} = [1\ -1]^T$, $\mathbf{R} = [1\ -1]$, ahonnan $\mathbf{B}^T\mathbf{A}\mathbf{R}^T = 4$. Mivel $\mathbf{R}^T\mathbf{B}^T = \mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, ezért $\mathbf{A}^+ = {}^1\!/_4\mathbf{A}$.

(b) Mivel $\mathbf{A}$ teljes oszloprangú,

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} \frac{5}{36} & \frac{2}{36} \\ \frac{2}{36} & \frac{8}{36} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{18} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}.$$

(c) Az előző pontbeli mátrix transzponáltja.

(d) Eredmény:

$$\begin{bmatrix} -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{13}{18} & \frac{7}{9} & -\frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

6. Igazoljuk a pszeudoinverzre vonatkozó alábbi összefüggéseket!
1. $\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}$,
2. $\mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+$,
3. $(\mathbf{A}\mathbf{A}^+)^T = \mathbf{A}\mathbf{A}^+$,
4. $(\mathbf{A}^+\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^+\mathbf{A}$.

Megoldás. ld. jegyzet 313. o.

7 (1-rangú mátrixok pszeudoinverze)**.** Mutassuk meg, hogy ha $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = 1$, akkor

$$\mathbf{A}^+ = \frac{1}{\mathrm{trace}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})}\mathbf{A}^T,$$

ahol $\mathrm{trace}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$ az $\mathbf{A}$ elemeinek négyzetösszege. Eszerint ha $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, akkor

$$\mathbf{a}^+ = \frac{1}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}^T = \frac{1}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a}^T.$$

Megoldás. Vegyük észre, hogy $\mathbf{B}^T\mathbf{A}\mathbf{R}^T = (\mathbf{B}^T\mathbf{B})(\mathbf{R}\mathbf{R}^T)$ éppen A elemeinek négyzetösszege, $\mathbf{R}^T\mathbf{B}^T$ pedig megegyezik $\mathbf{A}^T$-tal.

8. Bizonyítsuk be, hogy egy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix pontosan akkor ortogonális (vagyis $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$), ha $\mathbf{A}$ oszlopai (és sorai) ortonormált rendszert alkotnak.

Megoldás. Definíció szerint ellenőrizhető $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = I$ alapján.

9. Bizonyítsuk be, hogy ($n \times n$-es) ortogonális mátrixok szorzata és inverze is ortogonális.

Megoldás. Definíció szerint.

10. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ önadjungált és $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitér mátrixok, akkor $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$ önadjungált.

Megoldás. $(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M})^H = \mathbf{M}^H\mathbf{A}^H(\mathbf{M}^{-1})^H = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$, hisz $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}$ és $\mathbf{M}^H = \mathbf{M}^{-1}$.

11. Mutassuk meg, hogy minden normális felső háromszögmátrix diagonális.

Megoldás. az első sor egyenlő hosszú az első oszloppal, ebből adódik, hogy az első sorban a főátlón kívül csak 0-k vannak, stb.

HF. Igazoljuk, hogy blokkdiagonális mátrix esetén

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2 & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{A}_k \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^+ & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2^+ & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{A}_k^+ \end{bmatrix}.$$

HF. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ egységvektor, akkor $\mathbf{I} - 2\mathbf{e}\mathbf{e}^T$ – azaz a tükrözés mátrixa – szimmetrikus és ortogonális!