Felsőbb Matematika (2012-13 ősz) — 3. gyakorlat

1. Mutassuk meg, hogy a konzisztens valós $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek pontosan egy sortérbe eső megoldása van, és az a legkisebb abszolút értékű (azaz legrövidebb) megoldás.

Megoldás. ld. jegyzet, 3.47. Tétel. Annak mátrixszorzatos alakja tömören:

Csak egy sortérbe eső megoldás van: $\mathbf{Ax}_1 = \mathbf{b}$, $\mathbf{Ax}_2 = \mathbf{b}$ $\rightsquigarrow \mathbf{A}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$.

Van megoldás a sortérben: $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\mathcal{S} + \mathbf{x}_\mathcal{N} \rightsquigarrow \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{A}(\mathbf{x}_\mathcal{S} + \mathbf{x}_\mathcal{N}) = \mathbf{Ax}_\mathcal{S} = \mathbf{b}$.

Ez a legkisebb abszolút értékű: $|\mathbf{x}|^2 = |\mathbf{x}_\mathcal{S}|^2 + |\mathbf{x}_\mathcal{N}|^2 \geq |\mathbf{x}_\mathcal{S}|^2$ $\rightsquigarrow |\mathbf{x}| \geq |\mathbf{x}_\mathcal{S}|$

2. *Sherman – Morrison-formula* Tegyük fel, hogy az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix invertálható, és $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ két olyan vektor, hogy $1 + \mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u} \neq 0$. Ekkor $\mathbf{A} + \mathbf{uv}^T$ invertálható, és

$$\left(\mathbf{A} + \mathbf{uv}^T\right)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{uv}^T\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}.$$

Megoldás. Jegyzet 5.41. tétel.

3. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{D}$ invertálható mátrixok, akkor a következő ún. blokkdiagonális mátrixok invertálhatók, és

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix},$$

illetve

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{BD}^{-1} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix}.$$

ahol $\mathbf{B}$ tetszőleges, de megfelelő típusú mátrix. Hasonlóan, ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{D}$ négyzetes mátrixok, akkor

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & -\mathbf{XBD}^{-1} \\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{CX} & \mathbf{D}^{-1} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{CXBD}^{-1} \end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{X} = (\mathbf{A} - \mathbf{BD}^{-1}\mathbf{C})^{-1}$, és feltételezzük, hogy minden felírt mátrixinverz létezik. Ezt felhasználva számítsuk ki az alábbi mátrix inverzét:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás. A képletek egyszerű behelyettesítéssel ellenőrizhetők. Az inverz:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Tegyük fel, hogy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ és $\det \mathbf{A} = 3$. Határozzuk meg a $2\mathbf{A}^{-1}$, $(2\mathbf{A})^{-1}$ és $\mathbf{A}^2\mathbf{A}^T\mathbf{A}^{-1}$ mátrixok determinánsát!

Megoldás. $|2\mathbf{A}^{-1}| = 2^5|\mathbf{A}^{-1}| = 2^5\frac{1}{|\mathbf{A}|} = \frac{2^5}{3}$
$|(2\mathbf{A})^{-1}| = \frac{1}{|2\mathbf{A}|} = \frac{1}{2^5|\mathbf{A}|} = \frac{1}{2^5 3}$
$|\mathbf{A}^2\mathbf{A}^T\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}^2||\mathbf{A}^T||\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^2|\mathbf{A}||\mathbf{A}|^{-1} = |\mathbf{A}|^2 = 9$

5. Melyek igazak az alábbi állítások közül? (Az $\mathbf{A}$ itt mindig négyzetes mátrixot jelöl.)
(a) Ha egy determináns értéke 0, akkor van két azonos sora.
(b) Ha egy determináns értéke nem 0, akkor oszlopvektoriai lineárisan függetlenek.
(c) Ha az $\mathbf{Ax} = 0$ egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása, akkor $|\mathbf{A}| \neq 0$.
(d) $|\mathbf{A}| \neq 0$ pontosan akkor igaz, ha az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer nem oldható meg.
(e) $|\mathbf{A}| = 0$ pontosan akkor igaz, ha az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer egyértelműen megoldható.

6. Legyen $\mathbf{A}$ egy 10×10-es valós mátrix. Jelölje r_i az $\mathbf{A}^i$ rangját. Lehet-e az $(r_1, r_2, \ldots)$ sorozat egyenlő az alábbiakkal? *(a)* $(5, 6, \ldots)$, *(b)* $(9, 8, 7, \ldots, 4, 4 \ldots)$, *(c)* $(10, 9, 8, \ldots)$, *(d)* $(8, 5, \ldots)$.

Megoldás. Az $\mathbf{A}$ rangja megegyezik az $A : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ leképezés képterének dimenziójával, az $\mathbf{A}^i$ rangja az A^{i-1} képtere A általi képének dimenziójával.
(a) Az A leképezés az $\mathbb{R}^{10}$ teret egy 5-dimenziós részébe képzi, így ez az altér saját magába képződik, tehát nem lehet 5-nél több dimenziós: ez a sorozat nem lehetséges.
(b) Ha A a tér bázisán az alábbi módon hat, a rangok a megkívánt sorozatot adják: $\mathbf{e}_6 \mapsto \mathbf{e}_5 \mapsto \mathbf{e}_4 \mapsto \mathbf{e}_3 \mapsto \mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{0}$, és $\mathbf{e}_7$, $\mathbf{e}_8$, $\mathbf{e}_9$, $\mathbf{e}_{10}$ helyben maradnak. E leképezés mátrixa és annak hatványai is könnyen felírhatók.
(c) Ha $\mathbf{A}$ rangja 10, akkor determinánsa nem 0, így hatványaié sem, vagyis 10-zel csak a $10, 10, \ldots$ sorozat kezdődik.
(d) Ha $\mathbf{A}$ rangja 8, akkor magterének dimenziója 2, így egy 8-dimenziós tér képe legalább 6. E sorozat nem lehetséges.

7. Igazoljuk, hogy minden r-rangú mátrix előáll r darab 1-rangú összegeként.

Megoldás. Útmutatás: mutassuk meg, hogy minden 1-rangú mátrix előáll diadikus szorzatként, majd pl. használjuk a bázisfelbontást.

8. Tegyük fel, hogy az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixra $\mathbf{A}^2 = \mathbf{O}$. Mutassuk meg, hogy rangja legföljebb $n/2$.

Megoldás. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{O}(\mathbf{A}) \subseteq \mathcal{N}(\mathbf{A})$ (az oszloptér része a nulltérnek), és használjuk a dimenziótételt.

9. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$-es, akkor $\mathrm{r}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A})$.

Megoldás. Elég megmutatni, hogy $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}$ nulltere megegyezik:
$\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{0} = \mathbf{0}$
$\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \rightsquigarrow (\mathbf{Ax}) \cdot (\mathbf{Ax}) = 0 \rightsquigarrow \mathbf{Ax} = \mathbf{0}$

10. Írjuk fel a $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1),\ (1, 2, 3),\ (1, 1, 2)\}$ bázisról a $\mathcal{C} = \{(7, 3, 3),\ (8, 1, 2),\ (4, 4, 3)\}$ bázisra való áttérés mátrixát, és határozzuk meg a $(\mathbf{v})_\mathcal{B} = (3, 2, 1)$ vektor $\mathcal{C}$ bázisbeli alakját!

Megoldás. *1. megoldás:* A megadott vektorokból fölírhatók a két bázisból a standard bázisba való áttérés mátrixai:

$$\mathbf{A}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

amiből $\mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{E}}\mathbf{A}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathbf{A}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}^{-1}\mathbf{A}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$, amiből egy invertálás és egy mátrixszorzás után megkapható az áttérés mátrixa:

$$\mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 7 & 47 & 35 \\ -4 & -27 & -20 \\ -4 & -28 & -21 \end{bmatrix}$$

2. megoldás: Az áttérés mátrixának oszlopai a $\mathcal{B}$ bázis vektorainak $\mathcal{C}$ bázisban kifejezett alakjai. Ez egy szimultán egyenletrendszerből kapható meg:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 8 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 47 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -27 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -28 & -21 \end{array}\right]$$

Innen $[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = \mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ elvégzésével kapjuk, hogy $(\mathbf{v})_{\mathcal{C}} = (150, -86, -89)$.

11. Határozzuk meg a $\mathbf{P}$ és $\mathbf{R}$ mátrixok LU-felbontását, majd ezt fölhasználva

1. oldjuk meg a $\mathbf{Px} = (0, 2, 4, 6)$ egyenletrendszert,
2. invertáljuk az $\mathbf{R}$ mátrixot, ahol

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Megoldás. A Pascal-háromszög LU-felbontása két Pascal-háromszöget ad:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A másik felbontás is hasonlóan varázslatos:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Az egyenletrendszer megoldása $(-2, 2, 0, 0)$.
2. Az inverz:

$$\mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

12. Adjunk meg olyan lineáris transzformációt $\mathbb{R}^3$-ben (ha létezik), amely a $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ vektorokat a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ vektorokba viszi, ahol $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, -1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (2, -1, 3)$, és

(i) $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{w}_2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w}_3 = (1, 1, 2)$;
(ii) $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{w}_2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w}_3 = (3, 1, 5)$;
(iii) $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{w}_2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w}_3 = (2, 1, 3)$;

Írjuk fel e leképezés mátrixát!

Megoldás. Mindhárom kérdés megválaszolható úgy, hogy megoldjuk az $\mathbf{Aw}_i = \mathbf{v}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ egyenletekből álló 9-ismeretlenes egyenletrendszert, ahol az ismeretlenek az $\mathbf{A}$ mátrix elemei. Egyetlen mátrixszorzatba tömörítve a fenti egyenleteket, megoldandó az $\mathbf{AW} = \mathbf{V}$ mátrixegyenlet, ahol $\mathbf{A}$ az ismeretlen, és $\mathbf{W}$ illetve $\mathbf{V}$ a $\mathbf{w}_i$, illetve $\mathbf{v}_i$ vektorokból álló mátrix. Az *(i)* kérdésben W invertálható, ezért a megoldás az $A = VW^{-1}$ kiszámolásával is megoldható, de mindhárom esetben használható az elemi sorműveletekkel való megoldás. Ha mindkét oldal transzponáltját vesszük, az ismeretlenek a hagyományos helyen jelennek meg, így a $W^TA^T = V^T$ egyenletben az A^T oszlopvektoraiban három háromismeretlenes egyenletrendszert, vagyis egy szimultán egyenletrendszert kapunk. Ezek megoldása:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow$$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Tehát az *(i)* megoldása

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

A *(ii)* esetén végtelen sok megoldást kapunk:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A jobb oldali rész első oszlopát véve egy egyenletrendszer jobb oldalának, az $x + 2z = 1$, $y - z = -1$ egyenletrendszert kapjuk, melynek megoldása $z = r$, $y = -1 + r$, $x = 1 - 2r$, ahol r szabad paraméter. Hasonlóan megoldva a másik két egyenletrendszert is, majd a belőlük képzett mátrixot transzponálva kapjuk *(ii)* megoldását:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1-2r & -1+r & r \\ -2s & -1-s & s \\ 1-2t & -t & t \end{bmatrix}.$$

Azért kaptunk végtelen sok megoldást, mert a $\mathbf{w}_i$ vektorok összefüggőek, egy síkot feszítenek ki, és a köztük lévő összefüggések megegyeznek a $\mathbf{v}_i$ vektorok közti összefüggésekkel. Ez a síkon kívüli vektorok leképzésére még végtelen sok lehetőséget hagy. A *(iii)* esetén nincs megoldás, mert bár a $\mathbf{w}_i$ vektorok itt is összefüggőek, de köztük más összefüggés van, mint a $\mathbf{v}_i$ vektorok közt:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

13. Adjuk meg az alábbi lineáris transzformációk mátrixát a megadott bázisokban:

(a) az $x - 2y + z = 0$ síkra való merőleges vetítés a standard bázisban;
(b) $f : (x, y, z) \mapsto (2x - y + z, x + z, y - 3z)$ a standard, illetve az $\{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (2, 1, 1)\}$ bázisban;

(c) a sík tükrözése az $y = 2x$ egyenesre a standard, illetve az $\{(1,2),(-2,1)\}$ bázisban;

(d) $\mathbb{R}^n$ vetítése az $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vektor által kifeszített altérre a standard bázisban;

(e) $\mathbb{R}^n$ vetítése az $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vektorra merőleges hipersíkra a standard bázisban;

(f) $\mathbb{R}^n$ tükrözése az $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vektorra merőleges hipersíkra a standard bázisban.

Megoldás. *(a)* Az (a,b,c) ponton átmenő, az $x - 2y + z = 0$ síkra merőleges egyenes paraméteres vektoregyenlete: $(x,y,z) = (a,b,c) + t(1,-2,1) = (a+t, b-2t, c+t)$. Az egyenes metszéspontja a síkkal az $(a+t) - 2(b-2t) + (c+t) = 0$ egyenletből kapható $t = -\frac{1}{6}a + \frac{2}{6}b - \frac{1}{6}c$ paraméterértékből $(\frac{5}{6}a + \frac{2}{6}b - \frac{1}{6}c, \frac{2}{6}a + \frac{2}{6}b + \frac{2}{6}c, -\frac{1}{6}a + \frac{2}{6}b + \frac{5}{6}c)$. Ebből leolvasható, hogy az

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6}a + \frac{2}{6}b - \frac{1}{6}c \\ \frac{2}{6}a + \frac{2}{6}b + \frac{2}{6}c \\ -\frac{1}{6}a + \frac{2}{6}b + \frac{5}{6}c \end{bmatrix}$$

leképezést megvalósító mátrix

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{2}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}.$$

(b) Az f transzformáció mátrixa a $\mathcal{E} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ standard bázisban $\mathbf{A}_\mathcal{E} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

A $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\} = \{(1,1,0),(0,1,0),(2,1,1)\}$ bázisban az

$$\begin{aligned} f(\mathbf{c}_1) &= (1,1,1) = -\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3 \\ f(\mathbf{c}_2) &= (-1,0,1) = -3\mathbf{c}_1 + 2\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3 \\ f(\mathbf{c}_3) &= (4,3,-2) = 8\mathbf{c}_1 - 3\mathbf{c}_2 - 2\mathbf{c}_3 \end{aligned}$$

összefüggésből

$$\mathbf{A}_\mathcal{C} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 8 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

(a mátrix oszlopai a báziselemek képének koordinátavektorai). Egy másik megoldási lehetőséghez jutunk, ha az áttérés mátrixával számolunk:

$$\mathbf{C}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{E}} = \mathbf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Így $\mathbf{A}_\mathcal{C} = \mathbf{C}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{E}}\mathbf{A}_\mathcal{E}\mathbf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}} = \mathbf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}^{-1}\mathbf{A}_\mathcal{E}\mathbf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}$ fölhasználásával

$$\mathbf{A}_\mathcal{C} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 8 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

(c) Érdemes először a $\mathcal{C} = \{(1,2),(-2,1)\}$ bázisban fölírni a mátrixot, mert ennek elemei sajátvektorok, így a képüket meghatározni és koordinátázni is könnyű: $\mathbf{c}_1 = (1,2)$ és $\mathbf{c}_2 = (-2,1)$ jelöléssel

$$\begin{aligned} f(\mathbf{c}_1) &= \mathbf{c}_1 = 1 \cdot \mathbf{c}_1 + 0 \cdot \mathbf{c}_2 \\ f(\mathbf{c}_2) &= -\mathbf{c}_2 = 0 \cdot \mathbf{c}_1 + (-1) \cdot \mathbf{c}_2 \end{aligned}$$

tehát f mátrixa $\mathcal{C}$ szerint $\mathbf{A}_\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Az $\mathbf{A}_\mathcal{E}$ standard mátrixra $\mathbf{A}_\mathcal{E} = \mathbf{P}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}\mathbf{A}_\mathcal{C}\mathbf{P}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}^{-1}$, ahol $\mathbf{P}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, így azt kapjuk, hogy $\mathbf{A}_\mathcal{E} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$.

(d) Keressük $\mathbf{x} \mapsto \operatorname{proj}_\mathbf{a}(\mathbf{x})$ mátrixát. Ennek i-edik oszlopa

$$\operatorname{proj}_\mathbf{a}(\mathbf{e}_i) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}\mathbf{a} = \frac{a_i}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a},$$

amiből a vetítés mátrixa

$$\mathbf{P} = \left[\frac{a_1}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a} \;\middle|\; \frac{a_2}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a} \;\middle|\; \dots \;\middle|\; \frac{a_n}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}\right] = \frac{1}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}^T$$

(e) Keressük az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - \operatorname{proj}_\mathbf{a}(\mathbf{x})$ mátrixát:

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \frac{1}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}^T$$

(f) Keressük az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - 2\operatorname{proj}_\mathbf{a}(\mathbf{x})$ mátrixát:

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}^T$$

HF. (a) Legyen x, y és z három különböző valós, a, b és c három tetszőleges valós. Mutassuk meg, hogy egyetlen olyan legfeljebb másodfokú f polinom létezik, melyre $f(x) = a$, $f(y) = b$ és $f(z) = c$.

(b) Határozzuk meg az

$$\begin{bmatrix} 3 & 10 & 10 \\ 2 & 4 & 11 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

mátrix LDU-felbontását, valamint a

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

mátrix PLU-felbontását.