Felsőbb Matematika (2012-13 ősz) 2. gyakorlat

1. Az a és b értékektől függően hány megoldása van az alábbi egyenletrendszernek? Adjuk meg a megoldásokat paraméteres alakban!

$$\begin{aligned} 2x + \ y + \ z &= \ 4 \\ x + 2y - \ z &= -1 \\ x - \ y + 2z &= \ a \\ x + by + \ z &= \ 3 \end{aligned}$$

Megoldás. Az egyenletrendszer kibővített mártixát kell Gauss-eliminálnunk:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & a \\ 1 & b & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & a \\ 1 & b & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & 3 & a+1 \\ 0 & b-2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & a-5 \\ 0 & b-2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & a-5 \\ 0 & b & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{\text{ha } b\neq 0}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & a-5 \end{bmatrix}$$

Tehát, ha $a \neq 5$, akkor nincs megoldás, ha $a = 5$ és $b = 0$, akkor ∞ sok megoldás van ($(x, y, z) = (3 - t, -2 + t, t)$), egyébként, azaz ha $a = 5$ és $b \neq 0$, akkor egyetlen ($(x, y, z) = (1, 0, 2)$).

2. Tekintsük a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x - y + z - w &= 1 \\ x + y - z - w &= 0 \\ x - y - z + w &= 1 \\ y + z + w &= 1 \end{aligned}$$

Oldjuk meg mint *a)* valós-együtthatós, *b)* $\mathbb{F}_2$ fölötti, *c)* illetve $\mathbb{F}_3$ fölötti egyenletrendszert!

Megoldás. $\mathbb{R}$ fölött Gauss-eliminálva kapjuk, hogy $x = 1$, $y = 0$, $z = w = \frac{1}{2}$. Az egyenletrendszer $\mathbb{F}_2$ fölött nem megoldható, mert az első három egyenlet baloldalai megegyeznek, míg a jobboldalak különböznek. Végül $\mathbb{F}_3$ fölött a megoldás $x = 2 + w$, $y = 1 + w$, $z = w$, azaz itt három megoldás van.

3. Van-e olyan lineáris egyenletrendszer, aminek
a) 5 egyenlete, 6 ismeretlenje van, és egyértelmű a megoldása;
a) 6 egyenlete, 5 ismeretlenje van, és egyértelmű a megoldása;
a) 5 egyenlete, 6 ismeretlenje van, és nincs megoldása;
a) 5 egyenlete, 5 ismeretlenje van, és pontosan 5 megoldása van?

Megoldás. a) Nem lehetséges hiszen a változók száma (6) nagyobb, mint az együttható mátrix vagy a kibővített mátrix rangja (ami legfeljebb 5 lehet, a sorok száma).

b) Ez lehetséges, például $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$ és $x_4 + x_5 = 9$.

c) Ez lehetséges, például $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$ és $x_1 = 9$.

d) Egy egyenletrendszernek általában ($\mathbb{R}$ felett) vagy nincs, vagy pontosan egy vagy végtelen sok megoldása van. De a $\mathbb{Z}_5$ test felett van ilyen például: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_1 + x_2 = 3$.

4. Hat világítani képes nyomógomb van egy sorban. Ha egy gombot megnyomunk, az megváltoztatja az ő és szomszédja(i) állapotát (ha világított kialszik, ha nem égett, fölgyullad). A lámpák közül néhány világít. Ki tudjuk e őket kapcsolni megfelelő gombok megnyomásával úgy, hogy végül egy gomb se világítson?

Megoldás. Igen. Világos, hogy ha a kapcsolgatás során egy gombot és szomszédait páros sokszor nyomjuk meg, állapota nem változik, ha pedig páratlan sokszor, akkor megváltozik. Az is világos, hogy egy gombot sem érdemes egynél többször megnyomni, mert a páros sokszori nyomás olyan, mintha egyszer sem nyomtuk volna meg, a páratlan olyan, mintha egyszer. Ez pontosan azt jelenti, hogy a nyomások számát és a lámpák állapotát is $\mathbb{F}_2$ elemeivel érdemes „számolni". Legyen $\mathbf{b} = (a, b, c, d, e, f)$ a lámpák állapota. Amely kapcsolók ezt létrehozzák, ugyanazok ki is kapcsolják. Meg kell tehát oldanunk a

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & f \end{array}\right]$$

egyenletrendszert $\mathbb{F}_2$ fölött. A megoldás épp azt adja meg, hogy mely kapcsolókat kell megnyomni. Az együtthatómátrix elemi sorműveletekkel az egységmátrixba transzformálható, tehát minden egyenletrendszer egyértelműen megoldható. A megoldás általánosan:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b+c+e+f \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+b+c+e+f \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & a+b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & e+f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & a+b+d+e+f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a+b+d+e \end{array}\right]$$

Például ha csak az ötödik lámpa ég, azaz $e = 1$, $a = b = c = d = f = 0$, akkor a kikapcsolásához a harmadik gomb kivételével mindegyiket meg kell nyomni.

5. Mutassuk meg, hogy megváltozik a helyzet, ha a gombok egy kör mentén vannak elhelyezve. Jellemezzük azokat a mintákat, amelyek elolthatók, és azokat, amelyek nem!

Megoldás. *1. megoldás* Ezesetben a bővített mátrix, és annak redukált lépcsős alakja:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & e \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & f \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & f \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & a+f \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & a+b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & a+b+d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+b+d+e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+c+d+f \end{array}\right]$$

Tehát az egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $a+b+d+e=0$ és $a+c+d+f=0$.

6. Határozzuk meg az alábbi két altér metszetének egy bázisát!

$$\mathcal{U} = \operatorname{span}((1,2,2,1,2),(1,2,1,2,2),(2,1,1,2,2))$$
$$\mathcal{V} = \operatorname{span}((1,2,2,1,1),(1,2,1,2,1),(2,1,2,1,2))$$

Megoldás. Jelölje az $\mathcal{U}$ alteret generáló vektorokat $\mathbf{u}_i$ ($i=1,2,3$), a $\mathcal{V}$-t generálókat $\mathbf{v}_i$ ($i=1,2,3$). A metszet vektorai eleget tesznek a

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3 = d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + d_3\mathbf{v}_3$$

egyenletnek, ami átrendezve egy homogén lineáris egyenletrendszer. Ennek mátrixa és lépcsős alakja:

$$\begin{bmatrix}1&1&2&1&1&2\\2&2&1&2&2&1\\2&1&1&2&1&2\\1&2&2&1&2&1\\2&2&2&1&1&2\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1&0&0&0&-1&1\\0&1&0&0&1&-1\\0&0&1&0&0&1\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Innen $(c_1,c_2,c_3,-d_1,-d_2,-d_3) = s(1,-1,0,-1,1,0) + t(-1,1,-1,0,0,1)$. E két generátorvektorból a metszet tér két bázisvektora: $\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2 = (0,0,1,-1,0)$, $\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2+\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 = (2,1,2,1,2)$.

7. Határozzuk meg az alábbi egyenletrendszerek sortérbe eső egyetlen megoldását, és ezt felhasználva összes megoldását!

a)
$$\begin{aligned} x+\ y+z&=3\\ 2x+\ y-z&=2\\ 3x+2y\qquad&=5\end{aligned}$$

b) $x+4y+8z+12w=15$

c)
$$\begin{aligned} x+y+z+w&=3\\ x+y-z-w&=1\end{aligned}$$

Megoldás. *a)* Az egyenletrendszer redukált lépcsős alakja:

$$\begin{bmatrix}1&0&-2&-1\\0&1&3&4\end{bmatrix},$$

ahonnan a nullteret kifeszítő vektor $(2,-3,1)$. A rá való merőlegességet leíró egyenletet az egyenletrendszerhez írva a megoldás $z_0=1$, ahonnan $x_0=1$ és $y_0=1$. Az általános megoldás $(x,y,z)=(1,1,1)+t(2,-3,1)$

b) Nulltér: $(-4,1,0,0)$, $(-8,0,1,0)$, $(-12,0,0,1)$. A sortérbe eső megoldás biztosan az $(1,4,8,12)$ vektor skalárszorosa, mivel a sortér 1-dimenziós: $\mathbf{x}_0=\frac{1}{15}(1,4,8,12)$, az összes megoldás $\mathbf{x}_0+r(-4,1,0,0)+s(-8,0,1,0)+t(-12,0,0,1)$.

c) Redukált lépcsős alak:

$$\begin{bmatrix}1&1&0&0&2\\0&0&1&1&1\end{bmatrix}$$

Nulltér: $(1,-1,0,0)$, $0,0,1,-1)$. Sortérbe eső megoldás: $(1,1,1/2,1/2)$.

8. Mennyi a $(2,3,0,-1)$, $(1,2,-1,0)$, $(2,4,-2,0)$, $(1,0,3,-2)$ vektorrendszer rangja? Adjunk meg maximális méretű lineárisan független részrendszert, és állítsuk elő a többit ezek lineáris kombinációjaként. Másként fogalmazva: válasszunk bázist e négy vektor által kifeszített altérben e vektorok közül, és írjuk fel a többi vektor e bázisra vonatkozó koordinátás alakját.

Határozzuk meg a fenti vektorok által kifeszített altér merőleges kiegészítő alterének egy bázisát.

Megoldás. A négy vektor mátrixán végezzünk elemi sorműveleteket:

$$[\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\mathbf{v}_3|\mathbf{v}_4] \Rightarrow \begin{bmatrix}2&1&2&1\\3&2&4&0\\0&-1&-2&3\\-1&0&0&-2\end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&2&-3\\0&2&4&-6\\0&1&2&-3\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&2&-3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Tehát a $(2,3,0,-1)$ és $(1,2,-1,0)$ bázist alkotnak, és a $\mathbf{v}_3=2\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_4=2\mathbf{v}_1-3\mathbf{v}_2$, a koordinátás alakok: $(0,2)$, $(2,-3)$.

A merőleges kiegészítő altér egy bázisa a $(2,-1,0,1)$ és a $(-3,2,1,0)$ vektorokból áll.

9. Legyenek $V,W\subseteq\mathbb{R}^n$ alterek. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$\dim\langle V\cup W\rangle = \dim(V)+\dim(W)-\dim(V\cap W).$$

Megoldás. Válasszunk bázist a metszethez, ezt egészítsük ki V és W bázisává. Bizonyítsuk be, hogy a megadott vektorok összesége a generátum bázisát adja.

HF. Keressünk egy bázist az $\mathbb{R}^4$ tér $x+y+z+w=0$ egyenletű hipersíkjával párhuzamos vektorok alterében, és írjuk fel e hipersík egy – a bázisvektoroktól különböző – vektorának e bázisra vonatkozó koordinátás alakját!

HF. Igazoljuk, hogy egy vektortér vektorainak egy véges $\mathcal{V}$ halmaza pontosan akkor lineárisan független, ha $\operatorname{span}(\mathcal{V})$ bármely vektora csak egyféleképp áll elő $\mathcal{V}$ vektorainak lineáris kombinációjaként.