1. Melyek igazak az $\mathbb{R}^n$ vektortér minden f lineáris transzformációjára?
1. $\mathbf{v}$ sajátvektora f-nek $\Longrightarrow$ $\mathbf{v}$ sajátvektora f^2-nek;
2. $\mathbf{v}$ sajátvektora f^2-nek $\Longrightarrow$ $\mathbf{v}$ sajátvektora f-nek;
3. 0 sajátértéke f^2-nek $\Longrightarrow$ 0 sajátértéke f-nek.

2. Mondjunk egy lineáris leképezést, melynek sajátértékei (a) 1, 1, 1; (b) 1, 1, -1; (c) 1, -1, -1; (d)-1, -1, -1 (e) 1; (f) -1?

3. Adjuk meg az $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ altérre való merőleges vetítás mátrixát. Írjuk fel az $(1, 2, 0)$ vektort egy S-beli és egy rá merőleges vektor összegeként.

4. Mutassuk meg, hogy egy $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix pontosan akkor egy k dimenziós altérre való merőleges vetítés mátrixa, ha $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ és $r(\mathbf{P}) = k$.

5. Határozzuk meg a következő mátrixok általánosított (pszeudo)inverzét:

$$(a)\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},\quad (b)\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\quad (c)\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},\quad (d)\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Igazoljuk a pszeudoinverzre vonatkozó alábbi összefüggéseket!
1. $\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}$,
2. $\mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+$,
3. $(\mathbf{A}\mathbf{A}^+)^T = \mathbf{A}\mathbf{A}^+$,
4. $(\mathbf{A}^+\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^+\mathbf{A}$.

7 (1-rangú mátrixok pszeudoinverze)**.** Mutassuk meg, hogy ha $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = 1$, akkor

$$\mathbf{A}^+ = \frac{1}{\mathrm{trace}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})}\mathbf{A}^T,$$

ahol $\mathrm{trace}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$ az $\mathbf{A}$ elemeinek négyzetösszege. Eszerint ha $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, akkor

$$\mathbf{a}^+ = \frac{1}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}^T = \frac{1}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a}^T.$$

8. Bizonyítsuk be, hogy egy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix pontosan akkor ortogonális (vagyis $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$), ha $\mathbf{A}$ oszlopai (és sorai) ortonormált rendszert alkotnak.

9. Bizonyítsuk be, hogy ($n \times n$-es) ortogonális mátrixok szorzata és inverze is ortogonális.

10. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ önadjungált és $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitér mátrixok, akkor $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$ önadjungált.

11. Mutassuk meg, hogy minden normális felső háromszögmátrix diagonális.

HF. Igazoljuk, hogy blokkdiagonális mátrix esetén

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2 & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{A}_k \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^+ & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2^+ & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{A}_k^+ \end{bmatrix}.$$

HF. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ egységvektor, akkor $\mathbf{I} - 2\mathbf{e}\mathbf{e}^T$ – azaz a tükrözés mátrixa – szimmetrikus és ortogonális!