Felsőbb Matematika (2012-13 ősz) — 3. gyakorlat

1. Mutassuk meg, hogy a konzisztens valós $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek pontosan egy sortérbe eső megoldása van, és az a legkisebb abszolút értékű (azaz legrövidebb) megoldás.

2. *Sherman – Morrison-formula* Tegyük fel, hogy az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix invertálható, és $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ két olyan vektor, hogy $1 + \mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u} \neq 0$. Ekkor $\mathbf{A} + \mathbf{uv}^T$ invertálható, és

$$\left(\mathbf{A} + \mathbf{uv}^T\right)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{uv}^T\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}.$$

3. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{D}$ invertálható mátrixok, akkor a következő ún. blokkdiagonális mátrixok invertálhatók, és

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{D}\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{D}^{-1}\end{bmatrix},$$

illetve

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{O} & \mathbf{D}\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}\mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{BD}^{-1}\\ \mathbf{O} & \mathbf{D}^{-1}\end{bmatrix}.$$

ahol $\mathbf{B}$ tetszőleges, de megfelelő típusú mátrix. Hasonlóan, ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{D}$ négyzetes mátrixok, akkor

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}\mathbf{X} & -\mathbf{XBD}^{-1}\\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{CX} & \mathbf{D}^{-1} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{CXBD}^{-1}\end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{X} = (\mathbf{A} - \mathbf{BD}^{-1}\mathbf{C})^{-1}$, és feltételezzük, hogy minden felírt mátrixinverz létezik. Ezt felhasználva számítsuk ki az alábbi mátrix inverzét:

$$\begin{bmatrix}2 & 3 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

4. Tegyük fel, hogy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ és $\det \mathbf{A} = 3$. Határozzuk meg a $2\mathbf{A}^{-1}$, $(2\mathbf{A})^{-1}$ és $\mathbf{A}^2\mathbf{A}^T\mathbf{A}^{-1}$ mátrixok determinánsát!

5. Melyek igazak az alábbi állítások közül? (Az $\mathbf{A}$ itt mindig négyzetes mátrixot jelöl.)
(a) Ha egy determináns értéke 0, akkor van két azonos sora.
(b) Ha egy determináns értéke nem 0, akkor oszlopvektoriai lineárisan függetlenek.
(c) Ha az $\mathbf{Ax} = 0$ egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása, akkor $|\mathbf{A}| \neq 0$.
(d) $|\mathbf{A}| \neq 0$ pontosan akkor igaz, ha az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer nem oldható meg.
(e) $|\mathbf{A}| = 0$ pontosan akkor igaz, ha az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer egyértelműen megoldható.

6. Legyen $\mathbf{A}$ egy 10×10-es valós mátrix. Jelölje r_i az $\mathbf{A}^i$ rangját. Lehet-e az $(r_1, r_2, \ldots)$ sorozat egyenlő az alábbiakkal? (a) $(5, 6, \ldots)$, (b) $(9, 8, 7, \ldots, 4, 4 \ldots)$, (c) $(10, 9, 8, \ldots)$, (d) $(8, 5, \ldots)$.

7. Igazoljuk, hogy minden r-rangú mátrix előáll r darab 1-rangú összegeként.

8. Tegyük fel, hogy az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixra $\mathbf{A}^2 = \mathbf{O}$. Mutassuk meg, hogy rangja legföljebb $n/2$.

9. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$-es, akkor $\mathrm{r}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A})$.

10. Írjuk fel a $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1),\ (1, 2, 3),\ (1, 1, 2)\}$ bázisról a $\mathcal{C} = \{(7, 3, 3),\ (8, 1, 2),\ (4, 4, 3)\}$ bázisra való áttérés mátrixát, és határozzuk meg a $(\mathbf{v})_{\mathcal{B}} = (3, 2, 1)$ vektor $\mathcal{C}$ bázisbeli alakját!

11. Határozzuk meg a $\mathbf{P}$ és $\mathbf{R}$ mátrixok LU-felbontását, majd ezt fölhasználva
1. oldjuk meg a $\mathbf{Px} = (0, 2, 4, 6)$ egyenletrendszert,
2. invertáljuk az $\mathbf{R}$ mátrixot, ahol

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 6 & 10\\ 1 & 4 & 10 & 20\end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

12. Adjunk meg olyan lineáris transzformációt $\mathbb{R}^3$-ben (ha létezik), amely a $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ vektorokat a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ vektorokba viszi, ahol $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, -1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (2, -1, 3)$, és
(i) $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{w}_2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w}_3 = (1, 1, 2)$;
(ii) $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{w}_2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w}_3 = (3, 1, 5)$;
(iii) $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{w}_2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w}_3 = (2, 1, 3)$;
Írjuk fel e leképezés mátrixát!

13. Adjuk meg az alábbi lineáris transzformációk mátrixát a megadott bázisokban:
(a) az $x - 2y + z = 0$ síkra való merőleges vetítés a standard bázisban;
(b) $f : (x, y, z) \mapsto (2x - y + z, x + z, y - 3z)$ a standard, illetve az $\{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (2, 1, 1)\}$ bázisban;
(c) a sík tükrözése az $y = 2x$ egyenesre a standard, illetve az $\{(1, 2), (-2, 1)\}$ bázisban;
(d) $\mathbb{R}^n$ vetítése az $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vektor által kifeszített altérre a standard bázisban;
(e) $\mathbb{R}^n$ vetítése az $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vektorra merőleges hipersíkra a standard bázisban;
(f) $\mathbb{R}^n$ tükrözése az $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vektorra merőleges hipersíkra a standard bázisban.

HF. (a) Legyen x, y és z három különböző valós, a, b és c három tetszőleges valós. Mutassuk meg, hogy egyetlen olyan legfeljebb másodfokú f polinom létezik, melyre $f(x) = a$, $f(y) = b$ és $f(z) = c$.
(b) Határozzuk meg az

$$\begin{bmatrix}3 & 10 & 10\\ 2 & 4 & 11\\ 1 & 3 & -4\end{bmatrix}$$

mátrix LDU-felbontását, valamint a

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 4 & 5\end{bmatrix}$$

mátrix PLU-felbontását.