Felsőbb Matematika (2012-13 ősz) 2. gyakorlat

1. Az a és b értékektől függően hány megoldása van az alábbi egyenletrendszernek? Adjuk meg a megoldásokat paraméteres alakban!

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 4 \\ x + 2y - z &= -1 \\ x - y + 2z &= a \\ x + by + z &= 3 \end{aligned}$$

2. Tekintsük a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x - y + z - w &= 1 \\ x + y - z - w &= 0 \\ x - y - z + w &= 1 \\ y + z + w &= 1 \end{aligned}$$

Oldjuk meg mint *a)* valós-együtthatós, *b)* $\mathbb{F}_2$ fölötti, *c)* illetve $\mathbb{F}_3$ fölötti egyenletrendszert!

3. Van-e olyan lineáris egyenletrendszer, aminek
a) 5 egyenlete, 6 ismeretlenje van, és egyértelmű a megoldása;
a) 6 egyenlete, 5 ismeretlenje van, és egyértelmű a megoldása;
a) 5 egyenlete, 6 ismeretlenje van, és nincs megoldása;
a) 5 egyenlete, 5 ismeretlenje van, és pontosan 5 megoldása van?

4. Hat világítani képes nyomógomb van egy sorban. Ha egy gombot megnyomunk, az megváltoztatja az ő és szomszédja(i) állapotát (ha világított kialszik, ha nem égett, fölgyullad). A lámpák közül néhány világít. Ki tudjuk e őket kapcsolni megfelelő gombok megnyomásával úgy, hogy végül egy gomb se világítson?

5. Mutassuk meg, hogy megváltozik a helyzet, ha a gombok egy kör mentén vannak elhelyezve. Jellemezzük azokat a mintákat, amelyek elolthatók, és azokat, amelyek nem!

6. Határozzuk meg az alábbi két altér metszetének egy bázisát!

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \operatorname{span}((1,2,2,1,2),(1,2,1,2,2),(2,1,1,2,2)) \\ \mathcal{V} &= \operatorname{span}((1,2,2,1,1),(1,2,1,2,1),(2,1,2,1,2)) \end{aligned}$$

7. Határozzuk meg az alábbi egyenletrendszerek sortérbe eső egyetlen megoldását, és ezt felhasználva összes megoldását!

a)
$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x + y - z &= 2 \\ 3x + 2y \phantom{{}+z} &= 5 \end{aligned}$$

b) $x + 4y + 8z + 12w = 15$

c)
$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 3 \\ x + y - z - w &= 1 \end{aligned}$$

8. Mennyi a $(2,3,0,-1)$, $(1,2,-1,0)$, $(2,4,-2,0)$, $(1,0,3,-2)$ vektorrendszer rangja? Adjunk meg maximális méretű lineárisan független részrendszert, és állítsuk elő a többit ezek lineáris kombinációjaként. Másként fogalmazva: válasszunk bázist e négy vektor által kifeszített altérben e vektorok közül, és írjuk fel a többi vektor e bázisra vonatkozó koordinátás alakját.

Határozzuk meg a fenti vektorok által kifeszített altér merőleges kiegészítő alterének egy bázisát.

9. Legyenek $V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ alterek. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$\dim\langle V \cup W\rangle = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W).$$

HF. Keressünk egy bázist az $\mathbb{R}^4$ tér $x + y + z + w = 0$ egyenletű hipersíkjával párhuzamos vektorok alterében, és írjuk fel e hipersík egy – a bázisvektoroktól különböző – vektorának e bázisra vonatkozó koordinátás alakját!

HF. Igazoljuk, hogy egy vektortér vektorainak egy véges $\mathcal{V}$ halmaza pontosan akkor lineárisan független, ha $\operatorname{span}(\mathcal{V})$ bármely vektora csak egyféleképp áll elő $\mathcal{V}$ vektorainak lineáris kombinációjaként.