Felsőbb Matematika (2012-13 ősz) 1. gyakorlat

1. Igazoljuk, hogy a $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ vektorrendszerre az alábbi két állítás ekvivalens:
a) ha $\sum_{k=1}^n c_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$, akkor $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$,
b) ha $n > 1$, akkor egyik vektor sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként, ha $n = 1$, akkor $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$.

2. Legyen $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq c \leq 1$. Írjuk fel az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ helyvektorok végpontjait összekötő szakaszt $c : (1-c)$ arányban osztó pontba mutató vektort $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ lineáris kombinációjaként!

3 (Pithagorász)**.** Mutassuk meg, hogy $|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2$ pontosan akkor igaz, ha $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

4. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}\left(|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2\right)$.

5. Definiáljuk $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ vektorok skaláris szorzatát az $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{k=1}^n \bar{x}_k y_k$ képlettel. Mutassuk meg, hogy
a) $\mathbf{x} \cdot (\lambda \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$, $(\lambda \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \bar{\lambda}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$ és $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \overline{\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}}$,
b) (CBS) $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}||\mathbf{y}|$

6. *a)* Számítsuk ki a komplex N-edik egységgyökök összegét.
b) Számítsuk ki a komplex N-edik egységgyökök n-edik hatványainak összegét.

7. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{C}$ egy primitív N-edik egységgyök. Igazoljuk, hogy ha $\mathbf{x}_k = (1, \varepsilon^k, \varepsilon^{2k}, \ldots, \varepsilon^{(N-1)k})$ $(0 \leq k < N)$, akkor

$$\mathbf{x}_k \cdot \mathbf{x}_j = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \neq j, \\ N, & \text{ha } k = j. \end{cases}$$

8. Tegyük fel, hogy a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^k$ vektorok lineárisan függetlenek. Függetlenek-e a kövekező vektorrendszerek?
a) $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, $\ldots$, $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_n$,
b) $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$, $\ldots$, $\mathbf{v}_{n-1} - \mathbf{v}_n$, $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_1$,
c) $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$, $\ldots$, $\mathbf{v}_{n-1} + \mathbf{v}_n$, $\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_1$.

9. Bizonyítsuk be, hogy ha a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^k$ vektorok közül csak $\mathbf{v}_1$ áll elő a többi lineáris kombinációjaként, akkor $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$.

10. Egy nullvektortól különböző elemekből álló, legalább kételemű $\mathbb{R}^n$-beli $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ vektorrendszer pontosan akkor lineárisan összefüggő, ha van olyan $t \geq 2$ index, hogy $\mathbf{v}_t$ a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \ldots$, $\mathbf{v}_{t-1}$ vektorok lineáris kombinációja.

11. Bizonyítsuk be, hogy a következő struktúrák testet alkotnak:

a) a $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$ halmaz, ha a szorzást és az összeadást úgy definiáljuk, hogy az igazi szorzatnak illetve összegnek a p szerinti maradékát vesszük;
b) az $\{a + bi | a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{C}$ halmaz a komplex összeadásra és szorzásra nézve.

12. Melyek alkotnak vektorteret $\mathbb{R}$ fölött az alábbiak közül? A köztük szereplő vektorterek hány dimenziósak?

a) 3×3-as valós felső háromszögmátrixok a szokásos műveletekkel;
b) a racionális számnégyesek a szokásos összeadásra és skalárral való szorzásra nézve;
c) a legföljebb 5-ödfokú valós polinomok;
d) a valós számpárok az $(a, b) \oplus (c, d) = (a + d, b + c)$ összeadásra és $\lambda \cdot (a, b) = (\lambda a, \lambda b)$ skalárral való szorzásra nézve;
e) $\mathbb{C}$ a komplex számok összeadására és valóssal való szorzására nézve;
f) A sík pozitív y-koordinátájú helyvektorai a szokásos vektorösszeadásra és skalárral való szorzásra nézve.

13. Mutassuk meg, hogy az n-lakosú Páratlanvárosban, ahol minden klub páratlan létszámú, de bármely két klubnak páros sok a közös tagja, legföljebb n klub van.

HF. Bizonyítsuk be, hogy az $F = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ halmaz testet alkot a valós összeadásra és szorzásra nézve.