E	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

NÉV ______________________________ **NEPTUNKÓD** __________

Bevezetés az algebrába 1 **2. vizsga – gyakorlat** **2016-01-14**

Minden kérdésre írjuk a válaszokat a mellette lévő dobozba. Az első nyolc egyszerű kérdést kivéve minden feladat megoldását is ellenőrizzük, pontszámot a teljes megoldás alapján adunk. Az első nyolc feladat mindegyike 2 pontot, a továbbiak 8 pontot érnek. Kidolgozási idő 110 perc. Semmilyen segédeszköz nem használható!

E1. 2^{2016} mivel kongruens modulo 5?

E2. Legyen $p(x) = x^5 - 7x^4 + 7x^3 - 4x^2 - 2x + 3$. Mennyi a $p(6)$ helyettesítési érték?

E3. Mivel egyenlő $\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3$, ha ε primitív 4-edik egységgyök?

E4. Adjuk meg $-1-i$ reciprokának algebrai alakját!

E5. Írjuk fel az összes olyan mátrixot, amely a 2×2-es egységmátrixhoz hasonló!

E6. Ha $xy - yz = 0$ egy felület egyenlete a standard bázisban. Mi lesz az egyenlete az $(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)$ bázisban, ha a változókat e bázisban X, Y és Z jelöli?

E7. Számítsuk ki $\det(2(\mathbf{A}^{-1})\mathbf{A}^2)$-et, ha $\mathbf{A} \in M_4[\mathbb{R}]$ és $\det(\mathbf{A}) = 5$.

E8. Tekintsük a

$$\mathrm{trace} : M_2[\mathbb{R}] \to \mathbb{R};\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto a + d$$

lineáris leképezést, amely tehát minden 2×2-es valós mátrixhoz, annak nyomát rendeli. Adjuk meg e leképezés magterének és képterének dimenzióját, és egy-egy bázisát!

1. Határozzuk meg az $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ és a $g(x) = x^3 - 1$ polinomok legnagyobb közös osztóját a kibővített euklideszi algoritmussal, és azt az $u(x)$ és $v(x)$ polinomot, melyekre

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = (f(x), g(x)).$$

2. A $p(x) = x^3 + 2x + 2$ polinom irreducibilis-e a *(a)* $\mathbb{Q}$, *(b)* $\mathbb{R}$, illetve *(c)* $\mathbb{Z}_5$ testek felett? A válaszokat tömören indokoljuk!

3. Cramer-szabály alkalmazásával oldjuk meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyeletrendszert, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4. Adjuk meg $\mathbb{R}^4$-ben az $(1, 1, 1, 0)$ vektor által kifeszített $\mathcal{V}$ altér ortogonális kiegészítő alterének egy bázisát!

5. *(a)* Adjuk meg az előző feladatbeli $\mathcal{V}$ altérre való merőleges vetítés mátrixát a standard bázisban! *(b)* Ebből hogyan kapható meg a $\mathcal{V}^\perp$ altérre való merőleges vetítés mátrixa? *(c)* Bontsuk fel az $(1, 2, 3, 4)$ vektort a két fenti altérbe eső komponensek összegére!

6. Határozzuk meg az $(1, 1, 1)$ irányvektorú origón átmenő egyenesre való tükrözés mátrixát a standard bázisban!

7. Adjuk meg az

$$x + 2y + 2z = 2$$
$$x + 2y + 2z = 6$$

egyenletrendszer összes optimális megoldását a normálegyenlet megoldásával!

8. Határozzuk meg az előző feladatbeli egyenletrendszer együtthatómátrixának pszeudoinverzét és ennek segítségével az egyenletrendszer minimális abszolút értékű optimális megoldását!