1	2-8	9-12	13-	Σ

NÉV ______________________ **NEPTUNKÓD** __________

Bevezetés az algebrába 1 **0. vizsga – elmélet – elmélet** **2016-01-01**

Az írásbeli dolgozat első felében tesztkérdésekre kell válaszolni, melyekre összesen 20 pont kapható. A második részében definíciók és tételek precíz megfogalmazását kérjük. A matematikailag korrekt válaszra adunk maximális pontszámot. Az utolsó részben bizonyításokat, vagy azok egyes részeit kell tömören, de világosan leírni. A válaszokat írjuk a kérdéshez tartozó üres dobozba! Kidolgozási idő 60 perc. Semmilyen segédeszköz nem használható!

1. Mindegyik állításról állapítsuk meg, hogy igaz vagy hamis (I|H)! *(6 pont)*

a) Ha $a \mid bc$, akkor $a \mid b$ vagy $a \mid c$.

b) Ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ lineárisan összefüggő vektorrendszert alkotnak $\mathbb{R}^3$-ben, akkor $\mathbf{a}$ kifejezhető $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ lineáris kombinációjaként!

c) Egy mátrix bármely két lépcsős alakjának azonos a sortere.

d) Egy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor van végtelen sok megoldása, ha $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

e) Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek pontosan akkor van egyetlen optimális megoldása, ha $\mathrm{r}(\mathbf{A})$ egyenlő az ismeretlenek számával!

f) Szimmetrikus mátrixok szorzata szimmetrikus mátrix!

2. Melyik test az alábbi algebrai struktúrák közül: $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}_n$ (ahol n egy 1-nél nagyobb egész), $\mathbf{Z}_p$ (ahol p egy pozitív prím), $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{Z}[x]$, $\mathbf{R}[x]$. *(2 pont)*

3. Milyen feltétel fennállása esetén igaz, hogy az $an+b$ alakú számok közt végtelen sok prímszám van, ahol $a, b \in \mathbb{N}^+$, és n végig fut $\mathbb{N}$ elemein? *(2 pont)*

4. A $\mathbb{Z}[x]$-ben irreducibilis p polinom milyen feltételek mellett lesz irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$-ben is? *(2 pont)*

5. Írjuk fel a független $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ vektorrendszer által kifeszített altérre való merőleges vetítés mátrixát! *(2 pont)*

6. Írjuk fel $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ inverzét, ha $\mathbf{A}$ nilpotens mátrix. *(2 pont)*

7. Mi a kapcsolat az $\mathbf{AB}$ mátrix sorvektorai és az $\mathbf{A}$ vagy a $\mathbf{B}$ sorvektorai között? *(2 pont)*

8. Az alábbi táblázat bal felében síkbeli lineáris transzformációk determinánsának és nyomának sorszámozott listáját találjuk, míg a jobb felében geometriai transzformációk betűkkel jelölt listáját. Párosítsuk össze őket aszerint, hogy melyik transzformációnak mennyi a determinánsa és nyoma, azaz adjunk meg öt szám-betű-párt (szám szerint rendezve, pl. 1B 2C 3D 4A 5E)! *(2 pont)*

sorszám	det	nyom	betű	transzformáció
1:	-1	0	A:	a sík nagyítása 2-szeresére
2:	0	1	B:	vetítés egyenesre
3:	1	-2	C:	tükrözés egyenesre
4:	1	0	D:	forgatás 90°-kal
5:	4	4	E:	forgatás π radiánnal

9. Definiáljuk vektortér dimenziójának fogalmát! *(2 pont)*

10. Definiáljuk mátrix pszeudoinverzének fogalmát! *(2 pont)*

11. Fogalmazzuk meg Dirichlet approximációs tételét! *(3 pont)*

12. Fogalmazzuk meg a lineáris algebra alaptételét! *(3 pont)*

13. Bizonyítsuk be, hogy ha az inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak halmazát $\mathcal{I}$, a hozzá tartozó homogén egyenletrendszer megoldásainak halmazát $\mathcal{H}$ jelöli, és $\mathbf{x}_0$ az egyenletrendszer egy tetszőleges megoldása, akkor $\mathbf{x}_0 + \mathcal{H} \supseteq \mathcal{I}$! *(5 pont)*

14. Igazoljuk a Moore–Penrose-tétel állításának azt a részét, hogy ha $\mathbf{A}^+$ az $\mathbf{A}$ pszeudoinverze, akkor $\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}$. *(5 pont)*