E	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

NÉV ______________________________ **NEPTUNKÓD** __________

Bevezetés az algebrába 1 — **2. vizsga – gyakorlat** — **2016-01-14**

Minden kérdésre írjuk a válaszokat a mellette lévő dobozba. Az első nyolc egyszerű kérdést kivéve minden feladat megoldását is ellenőrizzük, pontszámot a teljes megoldás alapján adunk. Az első nyolc feladat mindegyike 2 pontot, a továbbiak 8 pontot érnek. Kidolgozási idő 110 perc. Semmilyen segédeszköz nem használható!

E1. 2^{2016} mivel kongruens modulo 5?

1

E2. Legyen $p(x) = x^5 - 7x^4 + 7x^3 - 4x^2 - 2x + 3$. Mennyi a $p(6)$ helyettesítési érték?

63

E3. Mivel egyenlő $\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3$, ha ε primitív 4-edik egységgyök?

-1

E4. Adjuk meg $-1-i$ reciprokának algebrai alakját!

$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

E5. Írjuk fel az összes olyan mátrixot, amely a 2×2-es egységmátrixhoz hasonló!

csak az egységmátrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E6. Ha $xy - yz = 0$ egy felület egyenlete a standard bázisban. Mi lesz az egyenlete az $(1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)$ bázisban, ha a változókat e bázisban X, Y és Z jelöli?

$Y^2 - Z^2$

E7. Számítsuk ki $\det(2(\mathbf{A}^{-1})\mathbf{A}^2)$-et, ha $\mathbf{A} \in M_4[\mathbb{R}]$ és $\det(\mathbf{A}) = 5$.

80

E8. Tekintsük a

$$\mathrm{trace} : M_2[\mathbb{R}] \to \mathbb{R}; \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto a + d$$

lineáris leképezést, amely tehát minden 2×2-es valós mátrixhoz, annak nyomát rendeli. Adjuk meg e leképezés magterének és képterének dimenzióját, és egy-egy bázisát!

Magtér dimenziója 3, bázisa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

a képtér $= \mathbb{R}$, dimenziója 1, bázisa [1].

1. Határozzuk meg az $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ és a $g(x) = x^3 - 1$ polinomok legnagyobb közös osztóját a kibővített euklideszi algoritmussal, és azt az $u(x)$ és $v(x)$ polinomot, melyekre $$u(x)f(x) + v(x)g(x) = (f(x), g(x)).$$	$(x^3 - x^2 + x - 1, x^3 - 1) = x - 1$, $u(x) = x + 1$, $v(x) = -x$
2. A $p(x) = x^3 + 2x + 2$ polinom irreducibilis-e a *(a)* $\mathbb{Q}$, *(b)* $\mathbb{R}$, illetve *(c)* $\mathbb{Z}_5$ testek felett? A válaszokat tömören indokoljuk!	*(a)* $\mathbb{Q}$ fölött irreducibilis a Schönemann–Eisenstein-kritérium miatt: $2 \nmid 1$, $2 \mid 2$, $2^2 \nmid 2$. *(b)* $\mathbb{R}$ fölött csak első és másodfokú polinom lehet irreducibilis; $\mathbb{R}$ fölött minden harmadfokú polinomnak van zérushelye, tehát e polinomnak van elsőfokú tényezője. *(c)* $\mathbb{Z}_5$ fölött $x^3 + 2x + 2 = (x-1)^2(x-2)$, tehát nem irreducibilis.
3. Cramer-szabály alkalmazásával oldjuk meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyeletrendszert, ahol $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$	$\det(\mathbf{A}) = -1$, $(x, y, z) = (1, -1, 0)$
4. Adjuk meg $\mathbb{R}^4$-ben az $(1, 1, 1, 0)$ vektor által kifeszített $\mathcal{V}$ altér ortogonális kiegészítő alterének egy bázisát!	$(-1, 1, 0, 0)$, $(-1, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$
5. *(a)* Adjuk meg az előző feladatbeli $\mathcal{V}$ altérre való merőleges vetítés mátrixát a standard bázisban! *(b)* Ebből hogyan kapható meg a $\mathcal{V}^\perp$ altérre való merőleges vetítés mátrixa? *(c)* Bontsuk fel az $(1, 2, 3, 4)$ vektort a két fenti altérbe eső komponensek összegére!	$\mathbf{P}_{\mathcal{V}^\perp} = \mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathcal{V}}$, ahol $\mathbf{P}_{\mathcal{V}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{P}_{\mathcal{V}^\perp} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ Felbontás $(1, 2, 3, 4) = (2, 2, 2, 0) + (-1, 0, 1, 4)$
6. Határozzuk meg az $(1, 1, 1)$ irányvektorú origón átmenő egyenesre való tükrözés mátrixát a standard bázisban!	a transzformáció mátrixa: $$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$
7. Adjuk meg az $$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 2 \\ x + 2y + 2z &= 6 \end{aligned}$$ egyenletrendszer összes optimális megoldását a normálegyenlet megoldásával!	$(4, 0, 0) + (-2, 1, 0)s + (-2, 0, 1)t$
8. Határozzuk meg az előző feladatbeli egyenletrendszer együtthatómátrixának pszeudoinverzét és ennek segítségével az egyenletrendszer minimális abszolút értékű optimális megoldását!	min. absz. opt. mo.: $(\frac{4}{9}, \frac{8}{9}, \frac{8}{9})$, $\mathbf{A}^+ = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$