E	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

NÉV ______________________________ **NEPTUNKÓD** __________

Bevezetés az algebrába 1 **1. vizsga – gyakorlat** **2016-01-07**

Minden kérdésre írjuk a válaszokat a mellette lévő dobozba. Az első nyolc egyszerű kérdést kivéve minden feladat megoldását is ellenőrizzük, pontszámot a teljes megoldás alapján adunk. Az első nyolc feladat mindegyike 2 pontot, a továbbiak 8 pontot érnek. Kidolgozási idő 110 perc. Semmilyen segédeszköz nem használható!

E1. Írjuk fel 25643-at kettes számrendszerben!

110010000101011

E2. Határozzuk meg 15 inverzét mod 8?

-1 vagy 7

E3. Mennyi a primitív 12-edik egységgyökök száma?

4

E4. Mennyi a $3x^5 - 4x^4 - 3x^3 + x + 2$ polinom gyökeinek összege és szorzata?

$\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}$

E5. Írjuk fel $-1 - i$ trigonometrikus alakját!

$\sqrt{2}(\cos \frac{5}{4}\pi + i \sin \frac{5}{4}\pi)$

E6. Ha $\mathbf{v}$ koordinátás alakja a standard bázisban $(1, 2, 3)$, akkor mi lesz $\mathbf{v}$ koordinátavektora a $\mathcal{B} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ bázisban?

1. mo: $\mathbf{v}_{\mathcal{B}} = \mathbf{X}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}\mathbf{v}_{\mathcal{E}} = \mathbf{Y}^{-1}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbf{v}_{\mathcal{E}} =$
$\big[[\mathbf{a}]_{\mathcal{E}} \mid [\mathbf{b}]_{\mathcal{E}} \mid [\mathbf{c}]_{\mathcal{E}}\big]^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
(ahol tehát $\mathbf{Y}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \big[[\mathbf{a}]_{\mathcal{E}} \mid [\mathbf{b}]_{\mathcal{E}} \mid [\mathbf{c}]_{\mathcal{E}}\big]$)
2. mo: $\mathbf{v}_{\mathcal{B}} = (x, y, z)$, ahol $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = \mathbf{v} \rightsquigarrow$
$[\mathbf{a} \mid \mathbf{b} \mid \mathbf{c}] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{v} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [\mathbf{a} \mid \mathbf{b} \mid \mathbf{c}]^{-1}\mathbf{v}.$

E7. Számítsuk ki $\det((2\mathbf{A}^\top)^{-1})$ értékét, ha $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_5[\mathbb{R}]$ és $\det(\mathbf{A}) = 4$.

$\frac{1}{128}$

E8. Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Mi $\mathbf{A}^{-1}$ második sorának első eleme?

-1

1. Oldjuk meg az $\begin{cases} x \equiv 0 \pmod 3 \\ x \equiv 4 \pmod 5 \\ x \equiv 5 \pmod 8 \end{cases}$ kongruenciarendszert!

$120t + 69$, azaz $x \equiv 69 \pmod{120}$
(vagy -171, -51, 189, $309, \dots$)

2. Bontsuk fel az $x^5 - 4x$ polinomot irreducibilis tényezők szorzatára az *(a)* $\mathbb{Q}[x]$, *(b)* $\mathbb{R}[x]$ és *(c)* $\mathbb{C}[x]$ polinomgyűrűben.

$x^5 - 4x =$
(a) $\mathbb{Q}[x]$: $x(x^2-2)(x^2+2)$,
(b) $\mathbb{R}[x]$: $x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+2)$,
(c) $\mathbb{C}[x]$: $x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2}i)$.

3. Adjuk meg $\mathbb{R}^4$-ben a $(1,0,1,0),(1,1,1,1)$ vektorok által kifeszített $\mathcal{V}$ altér ortogonális kiegészítő alterének egy bázisát!

$\{(-1,0,1,0),(0,-1,0,1)\}$

4. Adjuk meg az előző feladatbeli $\mathcal{V}$ altérre való merőleges vetítés mátrixát a standard bázisban és bontsuk fel a $\mathbf{v} = (1,0,5,2)$ vektort egy $\mathcal{V}$-beli és egy $\mathcal{V}^\perp$-beli vektor összegére!

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$(1,0,5,2) = (3,1,3,1) + (-2,-1,2,1)$.

5. Határozzuk meg az y tengely körüli 60^0-os elforgatás mátrixát a standard bázisban és a $\mathcal{B} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ bázisban!

A forgatás mátrixa

$$\mathbf{F}_\mathcal{E} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

A $\mathcal{B}$ bázisban $\mathbf{B}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \big[[\mathbf{a}]_\mathcal{E} \mid [\mathbf{b}]_\mathcal{E} \mid [\mathbf{c}]_\mathcal{E}\big]$ jelöléssel $\mathbf{B}^{-1}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbf{F}_\mathcal{E}\mathbf{B}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$.

6. Legyen az L lineáris leképezés mátrixa az $\mathbb{R}^3$ és $\mathbb{R}^2$ standard bázisaiban

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Határozzuk meg e leképezés magterének és képterének egy-egy bázisát, és adjuk meg ezen alterek dimenzióját!

$\dim(\mathrm{Ker}(L)) = 1$: $\{(-1,0,1)\}$
$\dim(\mathrm{Im}(L)) = 2$: $\{(1,0),(0,1)\}$

7. Adjuk meg az

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x + y &= 7 \\ x + y &= 4 \end{aligned} \qquad (1)$$

egyenletrendszer összes optimális megoldását a normálegyenlet megoldásával!

$(4,0) + (-1,1)t$

8. Határozzuk meg az előző feladatbeli (1) egyenletrendszer
(a) együtthatómátrixának pszeudoinverzét és
(b) minimális abszolút értékű optimális megoldását!

A pszeudoinverz:

$$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

a minimális abszolút értékű optimális (azaz a sortérbe eső) megoldás: $(2,2)$.