E	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

NÉV ______________________ **NEPTUNKÓD** __________

Bevezetés az algebrába 1 **0. vizsga – gyakorlat** **2016-01-01**

Minden kérdésre írjuk a válaszokat a mellette lévő dobozba. Az első feladat nyolc egyszerű kérdését kivéve minden feladat megoldását is ellenőrizzük, pontszámot a teljes megoldás alapján adunk. Az első nyolc feladat mindegyike 2 pontot, a továbbiak 8 pontot érnek. Kidolgozási idő 110 perc. Semmilyen segédeszköz nem használható!

E1. $\lfloor -\pi \rfloor =?$

-4

E2. Írjuk fel 2016-ot 9-es számrendszerben!

2680

E3. Határozzuk meg 2016^{1000} mod 10 értékét!

6

E4. Mennyi a primitív 20-adik egységgyökök száma?

8

E5. Mennyi a $2x^5 + 4x^4 - 3x^3 + x + 6$ polinom gyökeinek összege és szorzata?

összege $-4/2 = -2$, szorzata $(-1)^5 6/2 = -3$.

E6. Határozzuk meg az

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{vmatrix}$$

determináns értékét!

Vandermonde-determináns, értéke -48.

E7. Számítsuk ki az

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

blokkdiagonális mátrix inverzét!

Blokkdiagonális mátrixként kezelve csak a 2×2-es mátrixokat kell invertálni:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E8. Írjuk fel a

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix pszeudoinverzét!

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Határozzuk meg $(2016, 1000)$ értékét, és kibővített euklideszi algoritmussal adjuk meg a és b értékét, ahol $2016a + 1000b = (2016, 1000)$.

8, $a = -62$, $b = 125$.

2. Határozzuk meg a hányadost és a maradékot, ha az $x^5 - 2x^4 - x^3 - 1$ polinomot osztjuk az $x^3 - x + 2$ polinommal maradékosan.

$x^2 - 2x$, $-4x^2 + 4x - 1$

3. Benne van-e a $\mathbf{v} = (1, 0, 0, 1)$ és a $\mathbf{w} = (0, 4, 4, 8)$ vektor az $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 2, 3, 4)$, $(2, 1, 4, 3)$ vektorok által kifeszített $\mathcal{V}$ altérben?

$\mathbf{v}$ nincs, $\mathbf{w}$ benne van

4. Bontsuk fel az előző feladatbeli $\mathbf{v}$ vektort egy $\mathcal{V}$-be eső és egy rá merőleges vektor összegére!

$(1, 0, 0, 1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
1.mo: a $\mathcal{V}$-re való merőleges vetítés mátrixával
2.mo: a $\mathcal{V}$ merőleges kiegészítőjének, és az arra való merőleges vetítés mátrixának fölírásával (ez egyszerűbb)

5. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix kitüntetett alterei mindegyikének egy-egy bázisát, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{S}(\mathbf{A})$: $\{(1, 0, 2, 1), (0, 1, -1, 0)\}$ vagy $\{(1, 1, 1, 1), (2, 3, 1, 2)\}$
$\mathcal{N}(\mathbf{A})$: $\{(-2, 1, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$
$\mathcal{O}(\mathbf{A})$: $\{(1, 2, 1), (1, 3, 2)\}$ vagy $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1)\}$
$\mathcal{N}(\mathbf{A}^\top)$: $\{(1, -1, 1)\}$

6. Legyen az L lineáris leképezés mátrixa az $\mathbb{R}^2$ és $\mathbb{R}^3$ standard bázisaiban

$$\mathbf{L}_{\mathcal{E}_2 \leftarrow \mathcal{E}_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Írjuk fel e lineáris leképezés $\mathcal{B}_3$, $\mathcal{B}_2$ bázispárra vonatkozó $\mathbf{L}_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_3}$ mátrixát, ahol $\mathcal{B}_2 = \{(1, 0), (1, 1)\}$, $\mathcal{B}_3 = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$.

$$\mathbf{L}_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_3} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{E}_2} \mathbf{L}_{\mathcal{E}_2 \leftarrow \mathcal{E}_3} \mathbf{A}_{\mathcal{E}_3 \leftarrow \mathcal{B}_3}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

7. Adjuk meg az

$$\begin{aligned} x + y \qquad + w &= 4 \\ y + z + w &= 6 \\ x \qquad - z \qquad &= 4 \end{aligned}$$

egyenletrendszer összes optimális megoldását a normálegyenlet megoldásával!

$(2, 4, 0, 0) + (1, -1, 1, 0)t + (0, -1, 0, 1)s$

8. Határozzuk meg az előző feladatbeli egyenletrendszer együtthatómátrixának pszeudoinverzét!

Bázisfelbontás után:

$$\frac{1}{15} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 3 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & -5 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$