1	2-8	9-12	13-	Σ

NÉV ______________________________ **NEPTUNKÓD** ____________

Bevezetés az algebrába 1 **2. vizsga – elmélet** **2016-01-14**

Az írásbeli dolgozat első felében tesztkérdésekre kell válaszolni, melyekre összesen 20 pont kapható. A második részében definíciók és tételek precíz megfogalmazását kérjük. A matematikailag korrekt válaszra adunk maximális pontszámot. Az utolsó részben bizonyításokat, vagy azok egyes részeit kell tömören, de világosan leírni. A válaszokat írjuk a kérdéshez tartozó üres dobozba! Kidolgozási idő 60 perc. Semmilyen segédeszköz nem használható!

1. Mindegyik állításról állapítsuk meg, hogy igaz vagy hamis (I|H)! *(6 pont)*

a) Ha $k < n$, akkor az $\mathbb{R}^n$-beli $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektorok bázist alkotnak az általuk kifeszített altérben. H

b) Ha $(a, 5) = 1$, akkor $a^5 \equiv a \pmod 5$. I

c) Ha egy $\mathbb{Q}$ feletti polinomnak nincs racionális gyöke, akkor $\mathbb{Q}$ felett irreducibilis. H

d) Ha $\mathbb{R}^3$ három vektora egy síkba esik, akkor biztosan lineárisan összefüggők is. I

e) Elemi sorműveleteknél egy mátrix oszloptere nem változik. H

f) Alterek metszete mindig altér. I

2. Az $M_n[\mathbb{R}]$ mely részhalmazai alkotnak alteret az alábbiak közül: invertálható mátrixok, szinguláris mátrixok, felső háromszög mátrixok, szimmetrikus mátrixok. *(2 pont)*

a felső háromszög mátrixok és a szimmetrikus mátrixok (két szinguláris mátrix összege lehet invertálható, és két invertálható mátrix összege lehet szinguláris, a másik kettő tehát nem altér)

3. Legyen $\mathbf{A} \in M_{6\times 7}[\mathbb{R}]$. Mit lehet tudni $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ és $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ dimenziójának kapcsolatáról? *(2 pont)*

$\dim(\mathcal{S}(\mathbf{A})) + \dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = 7$

4. Van-e olyan $n \in \mathbb{N}^+$, hogy minden $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n[\mathbb{R}]$ esetén $\det(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})$. Ha igen, adjuk meg az összes ilyet! *(2 pont)*

van: $n = 1$

5. Mi az $r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ komplex számmal való szorzás geometriai tartalma? *(2 pont)*

r-szeresre nagyítás (kicsinyítés) és φ szöggel való forgatás.

6. Adjon rangfeltételt arra, hogy az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer inkonzisztens legyen! *(2 pont)*

$\mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) > \mathrm{r}(\mathbf{A})$

7. Legyen $\mathbf{A}^+$ az $\mathbf{A}$ mátrix pszeudoinverze. Mennyivel egyenlő az *(a)* $\mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+$ és a *(b)* $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{A}^+$ mátrix? *(2 pont)*

(a) $\mathbf{A}^+$, *(b)* $\mathbf{A}^\mathsf{T}$

8. Az alábbi táblázat bal felében térbeli lineáris transzformációk rangjának és determinánsának sorszámozott listáját találjuk, míg a jobb felében geometriai transzformációk betűkkel jelölt listáját. Párosítsuk össze őket aszerint, hogy melyik transzformációnak mennyi a rangja és nullitása, azaz adjunk meg öt szám-betű-párt (szám szerint rendezve, pl. 1B 2C 3D 4A 5E)! *(2 pont)*

1B 2E 3D 4C 5A

sorszám	rang	det	betű	transzformáció
1:	3	-1	A:	az origóba való leképezés
2:	3	1	B:	síkra való tükrözés
3:	2	0	C:	egyenesre való vetítés
4:	1	0	D:	síkra való vetítés
5:	0	0	E:	forgatás tetszőleges α szöggel

9. Definiáljuk a primitív n-edik egységgyök fogalmát! *(2 pont)*

h03_15b1.pdf 27. oldal

10. Definiáljuk két mátrix hasonlóságának fogalmát! *(2 pont)*

jegyzet 7.29

11. Fogalmazzuk meg a lineáris kongruenciák megoldhatóságáról és összes megoldásáról szóló tételt! *(3 pont)*

h02_15b1.pdf 23. oldal

12. Mi a kapcsolat az $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ és az $\mathbf{AB}$ mátrixok rangja között? *(3 pont)*

$\mathrm{r}(\mathbf{AB}) \leqslant \min(\mathrm{r}(\mathbf{A}), \mathrm{r}(\mathbf{B}))$

13. Mondjuk ki és bizonyítsuk be a determinánsok kifejtési tételét! *(5 pont)*

jegyzet 6.23. tétel

14. Mondjuk ki és bizonyítsuk be a racionális gyöktesztet! *(5 pont)*

h04_15b1.pdf 52. oldal