1	2-8	9-12	13-	Σ

NÉV ______________________________ **NEPTUNKÓD** __________

Bevezetés az algebrába 1 **1. vizsga – elmélet** **2016-01-07**

Az írásbeli dolgozat első felében tesztkérdésekre kell válaszolni, melyekre összesen 20 pont kapható. A második részében definíciók és tételek precíz megfogalmazását kérjük. A matematikailag korrekt válaszra adunk maximális pontszámot. Az utolsó részben bizonyításokat, vagy azok egyes részeit kell tömören, de világosan leírni. A válaszokat írjuk a kérdéshez tartozó üres dobozba! Kidolgozási idő 60 perc. Semmilyen segédeszköz nem használható!

1. Mindegyik állításról állapítsuk meg, hogy igaz vagy hamis (I|H)! *(6 pont)*

a) A páros számok gyűrűjében a 2 egység. H

b) Ha $ac \equiv bc \pmod{m}$, akkor $a \equiv b \pmod{m}$. H

c) Egy mátrix rangja egyenlő a benne lévő nem nulla sorok számával. H

d) Alterek uniója altér. H

e) Invertálható mátrixok összege invertálható. H

f) Permutációs mátrix transzponáltja egyenlő az inverzével! I

2. A $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ testek közül melyik algebrailag zárt? *(2 pont)*

$\mathbb{C}$

3. Soroljunk fel négy olyan mátrixhoz rendelt mennyiséget, amelyik invariáns a báziscserére vonatkozóan!

rang, nullitás, determináns, nyom

4. Hányadfokúak lehetnek az $\mathbb{R}$ felett irreducibilis polinomok?

1 vagy 2

5. Milyen feltétel fennállása esetén igaz, hogy az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer egyértelműen megoldható? *(2 pont)*

$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) =$ ismeretlenek száma

6. Adott $\mathbb{R}^n$-beli $\mathbf{v}$ vektorhoz egy $\mathcal{V} \leqslant \mathbb{R}^n$ altér melyik vektora van a legközelebb? *(2 pont)*

$\mathbf{proj}_{\mathcal{V}}\,\mathbf{v}$, azaz a $\mathbf{v}$ vektor $\mathcal{V}$ altérre való merőleges vetülete

7. Legyen $\mathbf{A}^+$ az $\mathbf{A}$ valós mátrix pszeudoinverze. Mit lehet tudni az $\mathbf{A}^+\mathbf{A}$ leképezésről? *(2 pont)*

az $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ sortérre való merőleges vetítés mátrixa

8. Az alábbi táblázat bal felében térbeli lineáris transzformációk nullitásának és nyomának sorszámozott listáját találjuk, míg a jobb felében geometriai transzformációk betűkkel jelölt listáját. Párosítsuk össze őket aszerint, hogy melyik transzformációnak mennyi a rangja és a determinánsa, azaz adjunk meg öt szám-betű-párt (szám szerint rendezve, pl. 1B 2C 3D 4A 5E)! *(2 pont)*

1E 2A 3D 4B 5C

sorszám	nullitás	nyom	betű	transzformáció
1:	0	-1	A:	síkra való tükrözés
2:	0	1	B:	egyenesre való vetítés
3:	1	2	C:	az origóba való leképezés
4:	2	1	D:	síkra való vetítés
5:	3	0	E:	forgatás π radiánnal egy egyenes körül

9. Definiáljuk vektorrendszer lineáris függetlenségének fogalmát! *(2 pont)*

jegyzet 1.10. (de ekvivalens módon definiálható az 1.48 tétel 2. pontjának állításával)

10. Definiáljuk egy egyenletrendszerhez tartozó normálegyenlet fogalmát! *(2 pont)*

jegyzet 7.51 tétel utáni megjegyzésben

11. Fogalmazzuk meg a lineáris diofantoszi egyenletek megoldhatóságáról és összes megoldásáról szóló tételt! *(3 pont)*

1. prezentáció (h01_15b1.pdf): Legyen $d = (a, b)$. Az $ax + by = c$ lineáris diofantoszi egyenlet pontosan akkor oldható meg, ha $d \mid c$. Ekkor az összes megoldás fölírható $x = x_0 + \frac{b}{d}t$, $y = y_0 - \frac{a}{d}t$, ahol t tetszőleges egész.

12. Fogalmazzuk meg a lineáris leképezésekre vonatkozó rang–nullitási tételt (más néven dimenziótételt)! *(3 pont)*

jegyzet 7.38 tétel vagy:
Ha $L : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ lineáris leképezés (ahol $\mathbb{F}$ test), akkor

$$\dim(\mathrm{Im}(L)) + \dim(\mathrm{Ker}(L)) = n.$$

13. Igazoljuk, hogy ha $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ ($\mathbb{F}$ tetszőleges test), akkor $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$. *(5 pont)*

jegyzet 6.10 bizonyítása

14. Legyen $\mathbb{F}$ test. Igazoljuk, hogy minden szimmetrikus $p \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ polinom felírható elemi szimmetrikus polinomok $\mathbb{F}$ fölötti polinomjaként, azaz létezik olyan $f \in \mathbb{F}[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ polinom, hogy *(5 pont)*

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(e_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, e_n(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

4. prezentáció (h04_15b1.pdf) 73–74. oldal