

NÉV _____

NEPTUNKÓD _____

Bevezetés az algebra 1

0. vizsga – elmélet – elmélet

2016-01-01

Az írásbeli dolgozat első felében tesztkérdésekre kell válaszolni, melyekre összesen 20 pont kapható. A második részében definíciók és tételek precíz megfogalmazását kérjük. A matematikailag korrekt válaszra adunk maximális pontszámot. Az utolsó részben bizonyításokat, vagy azok egyes részeit kell tömören, de világosan leírni. A választásokat írjuk a kérdéshez tartozó üres dobozba! Kidolgozási idő 60 perc. Semmilyen segédeszköz nem használható!

1. Mindegyik állításról állapítsuk meg, hogy igaz vagy hamis (I|H)! (6 pont)

a) Ha $a \mid bc$, akkor $a \mid b$ vagy $a \mid c$. H

b) Ha \mathbf{a} , \mathbf{b} és \mathbf{c} lineárisan összefüggő vektorrendszert alkotnak \mathbb{R}^3 -ben, akkor \mathbf{a} kifejezhető \mathbf{b} és \mathbf{c} lineáris kombinációjaként! H

c) Egy mátrix bármely két lépcsős alakjának azonos a sortere. I

d) Egy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor van végtelen sok megoldása, ha $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. H

e) Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek pontosan akkor van egyetlen optimális megoldása, ha $r(\mathbf{A})$ egyenlő az ismeretlenek számával! I

f) Szimmetrikus mátrixok szorzata szimmetrikus mátrix! H

2. Melyik test az alábbi algebrai struktúrák közül: \mathbf{N} , \mathbf{Z} , \mathbf{Z}_n (ahol n egy 1-nél nagyobb egész), \mathbf{Z}_p (ahol p egy pozitív prím), \mathbf{Q} , \mathbf{R} , \mathbf{C} , $\mathbf{Z}[x]$, $\mathbf{R}[x]$. (2 pont)

$\mathbf{Z}_p, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$

3. Milyen feltétel fennállása esetén igaz, hogy az $an + b$ alakú számok közt végtelen sok prímszám van, ahol $a, b \in \mathbb{N}^+$, és n végig fut \mathbb{N} elemein? (2 pont)

a és b relatív prímek

4. A $\mathbb{Z}[x]$ -ben irreducibilis p polinom milyen feltételek mellett lesz irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$ -ben is? (2 pont)

ha p nem konstans polinom

5. Írjuk fel a független $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ vektorrendszer által kifeszített altérre való merőleges vetítés mátrixát! (2 pont)

Legyen $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 | \dots | \mathbf{a}_k]$. A vetítés mátrixa $\mathbf{A}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top$.

6. Írjuk fel $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ inverzét, ha \mathbf{A} nilpotens mátrix. (2 pont)

$\mathbf{I} + \mathbf{A} + \dots + \mathbf{A}^{k-1}$, ahol k olyan egész, melyre $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$.

7. Mi a kapcsolat az \mathbf{AB} mátrix sorvektorai és az \mathbf{A} vagy a \mathbf{B} sorvektorai között? (2 pont)

\mathbf{AB} minden sorvektora \mathbf{B} sorvektorainak lineáris kombinációja.

8. Az alábbi táblázat bal felében síkbeli lineáris transzformációk determinánsának és nyomának sorszámozott listáját találjuk, míg a jobb felében geometriai transzformációk betűkkel jelölt listáját. Párosítsuk össze őket aszerint, hogy melyik transzformációnak mennyi a determinánsa és nyoma, azaz adjunk meg öt szám-betű-párt (szám szerint rendezve, pl. 1B 2C 3D 4A 5E)! (2 pont)

1C 2B 3E 4D 5A

sorszám	det	nyom	betű	transzformáció
1:	-1	0	A:	a sík nagyítása 2-szeresére
2:	0	1	B:	vetítés egyenesre
3:	1	-2	C:	tükrözés egyenesre
4:	1	0	D:	forгатás 90°-kal
5:	4	4	E:	forгатás π radiánnal

9. Definiáljuk vektortér dimenziójának fogalmát!

(2 pont)

jegyzet 3.31

10. Definiáljuk mátrix pszeudoinverzének fogalmát!

(2 pont)

jegyzet 7.61

11. Fogalmazzuk meg Dirichlet approximációs tételét!

(3 pont)

h01_15b1.pdf prezentáció 6. oldal

12. Fogalmazzuk meg a lineáris algebra alaptételét!

(3 pont)

jegyzet 3.39

13. Bizonyítsuk be, hogy ha az inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak halmazát \mathcal{I} , a hozzá tartozó homogén egyenletrendszer megoldásainak halmazát \mathcal{H} jelöli, és \mathbf{x}_0 az egyenletrendszer egy tetszőleges megoldása, akkor $\mathbf{x}_0 + \mathcal{H} \supseteq \mathcal{I}$!

(5 pont)

Legyen az egyenletrendszer $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, és legyen $\mathbf{z} \in \mathcal{I}$ egy tetszőleges megoldása. Tehát $\mathbf{Ax}_0 = \mathbf{b}$ és $\mathbf{Az} = \mathbf{b}$. Megmutatjuk, hogy $\mathbf{z} \in \mathbf{x}_0 + \mathcal{H}$, azaz van olyan $\mathbf{y} \in \mathcal{H}$, hogy $\mathbf{x}_0 + \mathbf{y} = \mathbf{z}$. Egyszerűen legyen $\mathbf{y} = \mathbf{z} - \mathbf{x}_0$. Meg kell mutatnunk, hogy $\mathbf{y} \in \mathcal{H}$. Valóban, $\mathbf{Ay} = \mathbf{A}(\mathbf{z} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{Az} - \mathbf{Ax}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

14. Igazoljuk a Moore–Penrose-tétel állításának azt a részét, hogy ha \mathbf{A}^+ az \mathbf{A} pszeudoinverze, akkor $\mathbf{AA}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}$.

(5 pont)

Legyen \mathbf{A} bázisfelbontása $\mathbf{A} = \mathbf{BR}$, ekkor $\mathbf{A}^+ = \mathbf{R}^T(\mathbf{RR}^T)^{-1}(\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T$. Behelyettesítve $\mathbf{AA}^+\mathbf{A} = \mathbf{AR}^T(\mathbf{RR}^T)^{-1}(\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{A} = \mathbf{BRR}^T(\mathbf{RR}^T)^{-1}(\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{BR} = \mathbf{BR} = \mathbf{A}$.