

**Szorzási szabály** Ha az  $A$  hamaz elemeinek száma  $|A|$ , a  $B$  halmazé  $|B|$ , akkor az  $(a, b)$  rendezett pároké  $|A| \cdot |B|$ , ahol  $a \in A, b \in B$ . (Másként:  $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ .)

**Sorbarendezési feladatok – permutációk**

**Alapfeladat** Hányféleképpen rendezhető sorba  $n$  dolog.

minden elem különböző	$P_n = n!$
az elemek közt $k_1, k_2, \dots, k_m$ azonos, ahol $k_1 + \dots + k_m \leq n$ ( $k_i > 1, i = 1, 2, \dots, m$ )	$P_n^{(k_1, k_2, \dots, k_m)} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}$

Szokás a  $k_i > 1$  helyett a  $k_i \geq 1$  egyenlőtlenséget kikötni, ekkor  $k_1 + \dots + k_m = n$ . Így például a  $P_8^{(3,3)}$  és a  $P_8^{(3,3,1,1)}$  ugyanazt az ismétléses permutációt jelöli.

**Példák** a) Hányféleképp rakható 5 különböző megírt levél 5 különböző címre megcímezett borítékba? b) Hányféleképp lehet a sakktábla bal felső sarkából a jobb alsóba jutni egy királlyal csak jobbra és lefelé lépve? c) Hány anagrammja van a MATEMATIKA szónak? d) Hányféleképp járhat körtáncot  $n$  ember? e) Hány kölcsönösen egyértelmű  $\{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  függvény létezik?

**Eredmények** a)  $P_5$  b)  $P_{14}^{(7,7)}$  c)  $P_{10}^{(3,2,2)} = P_{10}^{(3,2,2,1,1,1)}$  d)  $P_n/n = P_{n-1}$  e)  $P_n$

**Mintavételi feladatok – variációk, kombinációk**

**Alapfeladat** Adva van  $n$  különböző dolog. Egyesével húzva kiválasztunk közülük  $k$  darabot. Hányféleképpen tehetjük ezt meg? Ha számít a húzás sorrendje „ $n$  elem  $k$ -adosztályú variációiról”, ha nem számít, „kombinációiról” beszélünk. A variációt, illetve a kombinációt *ismétlésesnek* nevezzük, ha a mintavétel *visszatevéses*.

	a húzás sorrendje	
a mintavétel	számít	nem számít
visszatevés nélküli	$V_n^k$	$C_n^k$
visszatevéses	$V_n^{k,i}$	$C_n^{k,i}$

A kombinációk és variációk kiszámítására vonatkozó képletek:

	variációk	kombinációk
ismétlés nélküli ( $k \leq n$ )	$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!}$
ismétléses	$V_n^{k,i} = n^k$	$C_n^{k,i} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$

**Példák** a) Egy  $n$ -tagú társaságban a tagoknak  $k$  különböző tisztséget kell betölteniük. Hányféleképp tehetik ezt meg, ha mindenkinek csak egy tisztsége lehet, és hányféleképp, ha a tisztségek halmozhatók? b) Hányféle lehet egy lottóhúzás eredménye? c) Hányféleképp lehet a sakktábla bal felső sarkából a jobb alsóba jutni egy királlyal csak jobbra és lefelé lépve? d) Hány 3-lyukú buszjegy van?

**Eredmények** a)  $V_n^k, V_n^{k,i}$  b)  $C_{90}^5$  c)  $C_{14}^7$  d)  $C_3^3$

**Kiválasztási feladatok (lényegében azonos az előzővel)**

**Alapfeladat** Adva van  $n$  különböző típusú dolog. Egyesével kiválasztunk közülük  $k$  darabot. Vizsgáljuk, hogy számít-e a húzás sorrendje, és hogy minden típusból csak egy, vagy legalább  $k$  áll rendelkezésre.

	a sorrend számít	nem számít
minden tárgyból egyetlen példány van	$V_n^k$	$C_n^k$
minden tárgyból legalább $k$ példány van	$V_n^{k,i}$	$C_n^{k,i}$

**Példák** a) Hányféleképp tölthető ki egy totoszelvegy egy hasábjába? b) A Malacperselyben csak 1, 2, és 100 Ft-os érmék vannak, mindegyikből „élég sok”. Kivéve belőle 10 érmét, hányféle lehet azok összege? c) Hányféleképp vásárolható 4-féle sütitől 10 darab, ha mindegyik fajtaból van legalább 10-10?

**Eredmények** a)  $V_3^{13,i}$  b)  $C_3^{10,i}$  (minden összeg csak egyféleképp jöhet ki) c)  $C_4^{10,i}$

**Címkézési/hozzárendelési feladatok**

**Alapfeladat** Adva van  $n$  különböző címke. Megjelölünk velük  $k$  dolgot. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?

Minden címkéből	A dolgok különbözőek	megkülönböztethetetlenek
egy van	$V_n^k$	$C_n^k$
legalább $k$ van	$V_n^{k,i}$	$C_n^{k,i}$

**Példák** a) Hány részhalmaza van egy  $m$ -elemű halmaznak? b) Hányféleképp lehet kilyukasztani egy buszjegyet? **Eredmények** a)  $V_2^{m,i}$  b)  $V_2^{9,i} - 1$

**Szétosztási feladatok**

**Alapfeladat** Adott  $n$  különböző doboz, és azokba szétosztunk  $k$  dolgot.

Minden dobozba	A dolgok különbözőek	megkülönböztethetetlenek
csak egy dolog fér	$V_n^k$	$C_n^k$
legalább $k$ fér	$V_n^{k,i}$	$C_n^{k,i}$

**Véges számhalmazok közti leképezések számával kapcsolatos feladatok**

**Alapfeladat** Hány  $\{1, 2, \dots, k\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  függvény létezik?

	bármilyen	monoton növekvő
egy-egyértelmű	$V_n^k$	$C_n^k$
bármilyen	$V_n^{k,i}$	$C_n^{k,i}$

**Kapcsolatok**

$P_n^{(1,1,\dots,1)} = P_n, V_n^n = P_n, P_n^{(k,n-k)} = C_n^k, k!C_n^k = V_n^k, C_n^{k,i} = C_{n+k-1}^k,$   
 $C_n^k = C_{n-k}^{n-k}, C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k, V_2^{k,i} = \sum_{m=0}^k C_k^m.$