Bevezetés az algebrába – Lineáris leképezések

Wettl Ferenc
Algebra Tanszék

BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

2015. december 8.

1 Mátrixleképezések, lineáris leképezések

2 2- és 3-dimenziós geometriai transzformációk mátrixa

3 Hasonlóság

4 Alterek direkt összege és a vetítés

5 Merőleges vetítés és a legjobb közelítés

6 Egyenletrendszer optimális megoldása

7 Pszeudoinverz

1 Mátrixleképezések, lineáris leképezések

2 2- és 3-dimenziós geometriai transzformációk mátrixa

3 Hasonlóság

4 Alterek direkt összege és a vetítés

5 Merőleges vetítés és a legjobb közelítés

6 Egyenletrendszer optimális megoldása

7 Pszeudoinverz

A mátrixleképezés fogalma

D Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m\times n}$, az $A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m; \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ leképezést az $\mathbf{A}$-hoz tartozó mátrixleképezésnek nevezzük.

D Képtér: az A leképezés értékkészlete, melyet $\mathrm{Im}(A)$ jelöl. $(\mathrm{Im}(A) \leqslant \mathbb{F}^m)$

$\mathrm{Im}(A) = \mathcal{O}(\mathbf{A})$ (a leképezés képtere = a mátrix oszlopterével)

D Magtér (kernel): azoknak a vektoroknak az altere, melyet A a nullvektorba visz, jelölése $\mathrm{Ker}(A)$. $(\mathrm{Ker}(A) \leqslant \mathbb{F}^n)$

$\mathrm{Ker}(A) = \mathcal{N}(\mathbf{A})$ (a leképezés magtere = a mátrix nullterével)

T Legyen $\mathbb{F}$ test, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $\mathbf{X} \in \mathbb{F}^{m\times k}$, $\mathbf{Y} \in \mathbb{F}^{k\times n}$, $\mathbf{S}, \mathbf{T} \in \mathbb{F}^{n\times n}$, A, B, C, X, Y, S, T a hozzájuk tartozó mátrixleképezések, $c \in \mathbb{F}$ skalár. Ekkor

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} \iff A + B = C$, és
2. $c\mathbf{A} = \mathbf{C} \iff cA = C$.
3. $\mathbf{XY} = \mathbf{C} \iff X \circ Y = C$ (mátrixszorzás – függvények kompozíciója)
4. $\mathbf{S} = \mathbf{T}^{-1} \iff S = T^{-1}$ (mátrix inverze – függvény inverze)

A mátrixleképezés

P Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, és legyen

$$A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} \times \mathbf{x}.$$

Mutassuk meg, hogy az A mátrixleképezés, azaz létezik egy olyan $\mathbf{A}$ mátrix, hogy $A(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$.

M A vektori szorzás koordinátás alakja alapján

$$\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -a_3x_2 + a_2x_3 \\ a_3x_1 - a_1x_3 \\ -a_2x_1 + a_1x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

A mátrixleképezés tulajdonságai

T Legyen $A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ egy tetszőleges mátrixleképezés, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{F}^n$, $c, d \in \mathbb{F}$.

1. $A(c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) = cA(\mathbf{x}) + dA(\mathbf{y})$, azaz A megőrzi a lineáris kombinációt.
2. Az A homogén és additív leképezés, azaz

$$\begin{aligned} A(c\mathbf{x}) &= cA(\mathbf{x}), && \text{(a leképezés homogén), és} \\ A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y}), && \text{(a leképezés additív).} \end{aligned}$$

3. $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
4. Tetszőleges altér képe altér.
5. Tetszőleges affin altér képe affin altér.

Lineáris leképezés

D H_1 és H_2 mindegyikének elemein értelmezve van egy asszociatív összeadás és egy „skalárral való szorzás” művelet (pl. vektortér).

Azt mondjuk, hogy egy $A : H_1 \to H_2$ leképezés lineáris, ha homogén és additív, azaz ha tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H_1$ elemre és c skalárra

$$A(c\mathbf{x}) = cA(\mathbf{x}) \qquad (A \text{ homogén,})$$
$$A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} \qquad (A \text{ additív.})$$

$H_1 = H_2$ esetén lineáris transzformációnak is nevezzük.

P A síkbeli vektorok egy rögzített O pont körüli forgatása, egy egyenesre való tükrözése és merőleges vetítése lineáris leképezés.

P A $D : f \mapsto f'$ és az $I : f \mapsto \int_a^b f$ leképezések lineáris leképezések. (Mi lehet itt H_1 és H_2?)

Lineáris leképezés ekvivalens definíciói

Á Egy tetszőleges $A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ leképezésre az alábbi állítások ekvivalensek:

1. A lineáris, azaz homogén és additív.
2. Tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{F}^n$ és $c, d \in \mathbb{F}$ esetén
$$A(c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) = cA(\mathbf{x}) + dA(\mathbf{y})$$
3. Tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{F}^n$ és $c \in \mathbb{F}$ esetén
$$A(c\mathbf{x} + \mathbf{y}) = cA(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y})$$
4. „Megőrzi" a lineáris kombinációt, azaz tetszőleges $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{F}^n$ vektorokra és $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{F}$ skalárra
$$A(c_1\mathbf{x}_1 + \dots + c_k\mathbf{x}_k) = c_1A\mathbf{x}_1 + \dots + c_kA\mathbf{x}_k.$$

Az $\mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ leképezések mátrixleképezések

T Legyen $A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ egy tetszőleges függvény. Az A pontosan akkor lineáris leképezés, ha létezik egy olyan $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix, hogy az A függvény megegyezik az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ leképezéssel. Ekkor

$$\mathbf{A} = [A\mathbf{e}_1 | A\mathbf{e}_2 | \dots | A\mathbf{e}_n],$$

ahol $\mathbf{e}_i$ az i-edik standard egységvektor ($i = 1, 2, \dots, n$).

B (A mátrixleképezés $\Rightarrow$ A lineáris) ✓

(A mátrixleképezés $\Leftarrow$ A lineáris)

$$\begin{aligned}
A\mathbf{x} &= A(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n) \\
&= x_1 A\mathbf{e}_1 + x_2 A\mathbf{e}_2 + \dots + x_n A\mathbf{e}_n \\
&= \begin{bmatrix} A\mathbf{e}_1 & A\mathbf{e}_2 & \dots & A\mathbf{e}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{A}\mathbf{x}
\end{aligned}$$

Megjegyzések

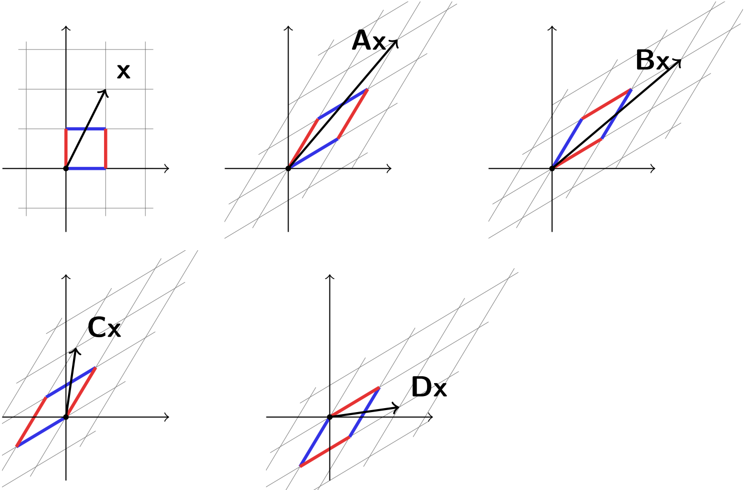
- Lineáris leképezésekről olyan esetben is beszélhetünk, amikor a leképezésnek nincs mátrixa (pl. végtelen dimenziós vektorterek esetén).
- Különbség van a lineáris leképezés és a mátrixleképezés közt $\mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ függvények esetén is:

  A lineáris leképezés független a bázistól, az csak maga a függvény, mely megadja, hogy melyik vektornak melyik vektor a képe.

  A mátrixleképezés mindig valamely bázisra vonatkozik. Egy lineáris leképezéshez minden bázisban tartozik egy mátrixleképezés, melynek mátrixa függ a bázistól.
- A lineáris $\mathbb{F} \to \mathbb{F}$ leképezések azonosak az $x \mapsto cx$ függvényekkel, ahol $c \in \mathbb{F}$ konstans.

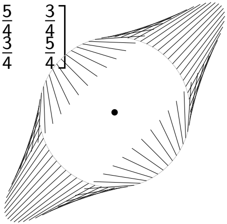
A mátrixleképezés szemléltetése négyzetráccsal

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\frac{5}{4} & \frac{3}{4}\\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4}\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{5}{4}\\ \frac{5}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{bmatrix}-\frac{5}{4} & \frac{3}{4}\\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4}\end{bmatrix},\ \mathbf{D}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{4} & \frac{5}{4}\\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}$$

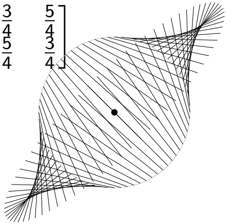


A mátrixleképezés szemléltetése egységkör-ábrával

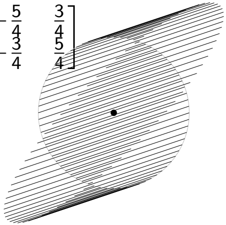
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$



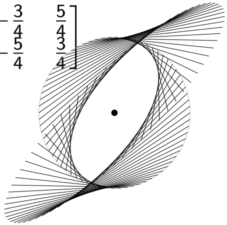
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$



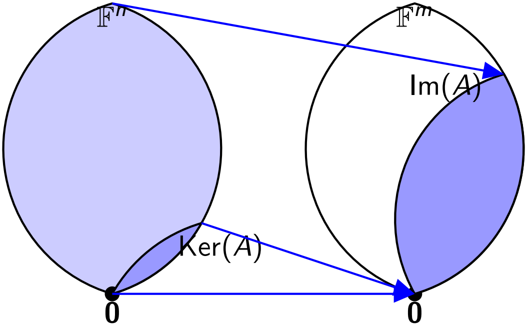
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$



A lineáris leképezés szemléltetése levéldiagrammal



Mátrix nyoma

D Négyzetes mátrix nyomán főátlójában lévő elemeinek összegét értjük. jelölés: $\operatorname{trace}(\mathbf{A})$.

Á A nyom lineáris leképezés, mert

1. $\operatorname{trace}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \operatorname{trace}\mathbf{A} + \operatorname{trace}\mathbf{B}$
2. $\operatorname{trace}(c\mathbf{A}) = c \operatorname{trace}\mathbf{A}$

T $\operatorname{trace}(\mathbf{AB}) = \operatorname{trace}(\mathbf{BA})$

B
$$\begin{aligned}
\operatorname{trace}(\mathbf{AB}) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}_{i*}\mathbf{B}_{*i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{B}_{j*}\mathbf{A}_{*j} \\
&= \operatorname{trace}(\mathbf{BA}).
\end{aligned}$$

T $\operatorname{trace}(\mathbf{C}^{\mathsf{T}}\mathbf{C}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2$

1 Mátrixleképezések, lineáris leképezések

2 2- és 3-dimenziós geometriai transzformációk mátrixa

3 Hasonlóság

4 Alterek direkt összege és a vetítés

5 Merőleges vetítés és a legjobb közelítés

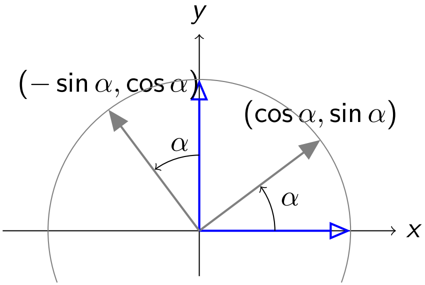
6 Egyenletrendszer optimális megoldása

7 Pszeudoinverz

Forgatás

T A sík vektorait egy pont körül α szöggel elforgató leképezés mátrixa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A\mathbf{i} & A\mathbf{j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$



- A koordinátatengelyek körüli α szöggel való forgatás mátrixa:
- z-tengely körüli forgatásnál **i** és **j** vektorok fordulnak

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\\ 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\\ 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

- x- és az y-tengely körüli forgatás mátrixai:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}\cos\alpha & 0 & \sin\alpha\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha\end{bmatrix}.$$

- a síkot α szöggel elforgató mátrix invertálható, mert determinánsa 1, inverze
- $$\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}\cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha)\\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}.$$

Merőleges vetítés

T A sík vagy a tér vektorait egy **b** irányvektorú egyenesre merőlegesen vetítő leképezés mátrixa

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{b}}\mathbf{b}\mathbf{b}^\mathsf{T}, \text{ speciálisan } \mathbf{P} = \mathbf{e}\mathbf{e}^\mathsf{T}, \text{ ha } \mathbf{e} \text{ egységvektor.}$$

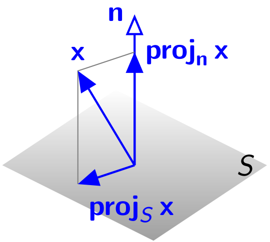
B **x**-nek a **e** egységvektor egyenesére eső merőleges vetülete

$$\mathbf{proj_e\,x} = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{e})\cdot\mathbf{e} = \mathbf{e}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{x}) = \mathbf{e}(\mathbf{e}^\mathsf{T}\mathbf{x}) = (\mathbf{e}\mathbf{e}^\mathsf{T})\mathbf{x} \rightsquigarrow \mathbf{P} = \mathbf{e}\mathbf{e}^\mathsf{T}.$$

Ha $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{e} = \mathbf{b}/|\mathbf{b}|$ jelölés mellett $\mathbf{P} = \mathbf{e}\mathbf{e}^\mathsf{T} = \mathbf{b}\mathbf{b}^\mathsf{T}/|\mathbf{b}|^2$.

T A tér vektorait az **n** normálvektorú síkra merőlegesen vetítő leképezés mátrixa

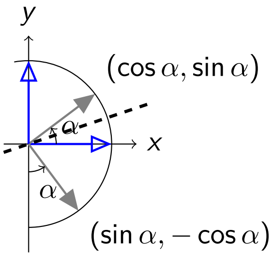
$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}^\mathsf{T}.$$



Tükrözés

T A sík vektorait az x-tengellyel $\alpha/2$ szöget bezáró egyenesre tükröző lineáris leképezés mátrixa

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}.$$



T A tér vektorait az $\mathbf{n}$ normálvektorú síkra tükröző leképezés mátrixa

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}}.$$

Vetítés

P Határozzuk meg annak a lineáris leképezésnek a mátrixát, mely a tér összes pontját az $(1,-2,1)$ vektorral párhuzamos irányban az $x+y+2z=0$ egyenletű síkra vetíti.

M A vetítés **P** mátrixára

$$\mathbf{P}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{P}\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{P}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Egyetlen mátrixszorzásba foglalva:

$$\mathbf{P}\begin{bmatrix}-1&-2&1\\1&0&-2\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-2&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\text{ ahonnan }\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0&-1&-2\\2&3&4\\-1&-1&-1\end{bmatrix}.$$

Eltolás

- Az eltolás nem lineáris leképezés, de megvalósítható lineáris leképezéssel.
- Sík eltolása beágyazva a térbe: a $z = 1$ egyenletű síkot toljuk el:

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + a \\ y + b \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ez ugyan még nem lineáris, de mivel $z = 1$, ezért a

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + az \\ y + bz \\ z \end{bmatrix}$$

leképezés már az, mátrixa

$$\mathbf{T} = T \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1 Mátrixleképezések, lineáris leképezések

2 2- és 3-dimenziós geometriai transzformációk mátrixa

3 Hasonlóság

4 Alterek direkt összege és a vetítés

5 Merőleges vetítés és a legjobb közelítés

6 Egyenletrendszer optimális megoldása

7 Pszeudoinverz

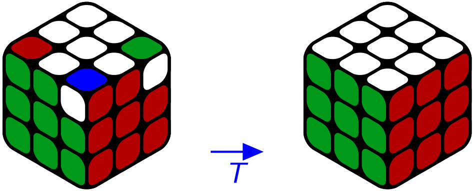
Lineáris leképezés mátrixa különböző bázisokban

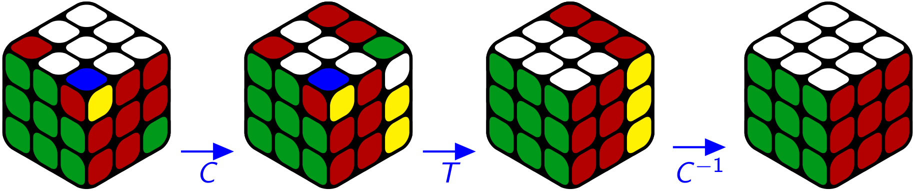
$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
{[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}} \arrow[r, "\mathbf{L}_{\mathcal{B}}"] & {[L\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}} \\
{[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}} \arrow[u, "\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}"] \arrow[r, "\mathbf{L}_{\mathcal{A}}"'] & {[L\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}} \arrow[u, "\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
{[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}} \arrow[r, "\mathbf{L}_{\mathcal{B}}"] & {[L\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}} \arrow[d, "\mathbf{C}_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathbf{C}^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}"] \\
{[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}} \arrow[u, "\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}"] \arrow[r, "\mathbf{L}_{\mathcal{A}}"'] & {[L\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}}
\end{tikzcd}$$

$$\mathbf{L}_{\mathcal{B}}\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}} = \mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}\mathbf{L}_{\mathcal{A}}$$

$$\mathbf{L}_{\mathcal{A}} = \mathbf{C}_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbf{L}_{\mathcal{B}}\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}, \text{ illetve}$$
$$\mathbf{L}_{\mathcal{A}} = \mathbf{C}^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}\mathbf{L}_{\mathcal{B}}\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$$





$$C^{-1}TC$$

Hasonlóság

D Azt mondjuk, hogy az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix hasonló a $\mathbf{B}$ mátrixhoz, ha létezik olyan invertálható $\mathbf{C}$ mátrix, hogy

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}.$$

J Jelölés: $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

M Ha $\mathbf{A}$ hasonló $\mathbf{B}$-hez, akkor $\mathbf{B}$ is hasonló $\mathbf{A}$-hoz.

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{C}^{-1} = (\mathbf{C}^{-1})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}^{-1} = \hat{\mathbf{C}}^{-1}\mathbf{B}\hat{\mathbf{C}}.$$

P $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$, mert $\begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$,

vagy $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

D A $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ alakú kifejezést az $\mathbf{A}$ mátrix $\mathbf{C}$-vel való konjugáltjának nevezzük.

Hasonlóság

T Két mátrix pontosan akkor hasonló, ha van két olyan bázis, melyekben e két mátrix ugyanannak a lineáris leképezésnek a mátrixa.

B (L lin.lek. $\Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{L}_{\mathcal{A}} \sim \mathbf{B} = \mathbf{L}_{\mathcal{B}}$) ✓

($\exists L$ lin.lek. $\Leftarrow \mathbf{A} \sim \mathbf{B}$)

$\mathbf{A} \sim \mathbf{B} \rightsquigarrow \mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$

Legyen $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n\}$, ekkor

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}^{-1}\mathbf{AC}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}.$$

L az $\mathbf{A}$ mátrixhoz tartozó mátrixleképezés a standard bázisban, $\mathbf{B}$ az L mátrixa a $\mathcal{C}$ bázisban.

Hasonlóságra invariáns tulajdonságok

T Ha $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, akkor

1. $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{B})$,
2. $\dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = \dim(\mathcal{N}(\mathbf{B}))$,
3. $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B})$,
4. $\mathrm{trace}(\mathbf{A}) = \mathrm{trace}(\mathbf{B})$.

B

1. $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \dim(\mathcal{O}(\mathbf{A})) = \dim(\mathrm{Im}(L)) = \dim(\mathcal{O}(\mathbf{B})) = \mathrm{r}(\mathbf{B})$
2. $\dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = \dim(\mathrm{Ker}(L)) = \dim(\mathcal{N}(\mathbf{B}))$
3. $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}) = \det(\mathbf{C}^{-1})\det(\mathbf{B})\det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{B})$, mivel $\det(\mathbf{C})\det(\mathbf{C}^{-1}) = 1$.
4. Legyen $\mathbf{C} = [c_{ij}]$, $\mathbf{C}^{-1} = [d_{ij}]$, ekkor

$$\mathrm{trace}\,\mathbf{B} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} d_{ij}a_{jk}c_{ki}\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\left(\sum_{i=1}^{n} c_{ki}d_{ij}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\delta_{jk} = \mathrm{trace}\,\mathbf{A}$$

Lineáris leképezés mátrixa különböző bázispárokban

- Legyen a $\mathcal{U}$ vektortér két bázisa $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$, a $\mathcal{V}$ pi vektortér két bázisa $\mathcal{A}'$ és $\mathcal{B}'$.

  Az $L : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ lineáris leképezés mátrixa az $\{\mathcal{A}, \mathcal{A}'\}$ bázispárban $\mathbf{L}_{\mathcal{A}'\leftarrow\mathcal{A}}$, a $\{\mathcal{B}, \mathcal{B}'\}$ bázispárban $\mathbf{L}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}$,

  a bázisok közti áttérések mátrixai $\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$, illetve $\mathbf{D}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{A}'}$.

Lineáris leképezés mátrixa különböző bázispárokban

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=huge]
{[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}} \arrow[r, "\mathbf{L}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}"] & {[L\mathbf{x}]_{\mathcal{B}'}} \arrow[d, "\mathbf{D}^{-1}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{A}'}"] \\
{[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}} \arrow[u, "\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}"] \arrow[r, "\mathbf{L}_{\mathcal{A}'\leftarrow\mathcal{A}}"'] \arrow[ur, phantom, "\mathbf{D}_{\mathcal{A}'\leftarrow\mathcal{B}'} ="] & {[L\mathbf{x}]_{\mathcal{A}'}}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=huge]
{[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}} \arrow[r, "\mathbf{L}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}"] & {[L\mathbf{x}]_{\mathcal{B}'}} \arrow[d, "\mathbf{D}^{-1}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{A}'}"] \\
{[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}} \arrow[u, "\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}"] \arrow[r, "\mathbf{L}_{\mathcal{A}'\leftarrow\mathcal{A}}"'] \arrow[ur, phantom, "\mathbf{D}_{\mathcal{A}'\leftarrow\mathcal{B}'} ="] & {[L\mathbf{x}]_{\mathcal{A}'}}
\end{tikzcd}
$$

- Áttérések: $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}, \quad [L\mathbf{x}]_{\mathcal{B}'} = \mathbf{D}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{A}'}[L\mathbf{x}]_{\mathcal{A}'},$
- Az $\mathbf{L}_{\mathcal{A}'\leftarrow\mathcal{A}}$ és $\mathbf{L}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}$ mátrixok hatásai:

$$[L\mathbf{x}]_{\mathcal{A}'} = \mathbf{L}_{\mathcal{A}'\leftarrow\mathcal{A}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}, \quad [L\mathbf{x}]_{\mathcal{B}'} = \mathbf{L}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}.$$

- Lineáris leképezés mátrixai közti kapcsolat

$$\mathbf{D}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{A}'}\mathbf{L}_{\mathcal{A}'\leftarrow\mathcal{A}} = \mathbf{L}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}, \text{ azaz}$$

$$\mathbf{L}_{\mathcal{A}'\leftarrow\mathcal{A}} = \mathbf{D}^{-1}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{A}'}\mathbf{L}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}.$$

Lineáris leképezés mátrixa különböző bázispárokban

- Lineáris leképezések mátrixai Ha **A** és **B** ugyanannak az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezésnek két mátrixa különböző bázispárokban, akkor
  1. a két mátrix rangja megegyezik,
  2. a két mátrix nullitása megegyezik.
- ha valamely invertálható **C** és **D** mátrixszal $\mathbf{A} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{BC}$ és átrendezve $\mathbf{B} = \mathbf{DAC}^{-1}$, akkor a szorzatmátrix rangjára vonatkozó állítás szerint $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{BC}) \leqslant r(\mathbf{B})$ és $r(\mathbf{B}) = r(\mathbf{DAC}^{-1}) \leqslant r(\mathbf{A})$. Így $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B})$.

  Innen $\dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = n - r(\mathbf{A}) = n - r(\mathbf{B}) = \dim(\mathcal{N}(\mathbf{B}))$.

Rang, nullitás, determináns, nyom fogalmának kiterjesztése

D A lineáris $L : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ leképezés rangján képterének dimenzióját értjük, azaz $\mathrm{r}(L) = \dim(\mathrm{Im}(L))$. A magtér dimenzióját, azaz a $\dim(\mathrm{Ker}(L))$ számot a lineáris leképezés nullitásának nevezzük.

D A lineáris $L : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ transzformáció $\det L$-lel jelölt determinánsán (illetve $\operatorname{trace} L$-lel jelölt nyomán) az L leképezés bármely bázisban fölírt mátrixának determinánsát (illetve nyomát) értjük. A definíció értelmes, hisz e két érték mindegyike független a bázis választásától.

T Dimenziótétel lineáris leképezésekre – rang-nullitási tétel Legyen $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ egy lineáris leképezés. Ekkor

$$\mathrm{r}(L) + \dim(\mathrm{Ker}(L)) = n.$$

Példák

- Határozzuk meg a rangját, nullitását, determinánsát, nyomát a sík
  1. α szögű elforgatásának,
  2. egy egyenesre való tükrözésének,
  3. egy egyenesre való merőleges vetítésének,

  a tér
  4. egy egyenes körül való α-szögű elforgatásának,
  5. egy egyenesre való merőleges vetítésének,
  6. egy síkra való merőleges vetítésének,
  7. egy síkra való merőleges tükrözésének!
- Legyen $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ egy lineáris transzformáció. A $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ vektorok és az $\{A\mathbf{v}_1, \dots, A\mathbf{v}_n\}$ által kifeszített paralelepipedonok térfogata hogyan viszonyul egymáshoz?

Lineáris leképezések néhány tulajdonsága

D Egy $f : V \to W$ függvény

1. szürjektív, ha „ráképezés”, azaz $\operatorname{Ran} f = W$,
2. injektív (egy-egyértelmű), ha $u \neq v \in V$ esetén $f(u) \neq f(v)$,
3. bijektív (kölcsönösen egyértelmű), ha injektív és szürjektív.

D A bijektív $\mathcal{V} \to \mathcal{W}$ lineáris leképezéseket izomorfizmusnak nevezzük, és amh. a $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ vektorterek izomorfak, ha van köztük egy izomorfizmus. Jelölés $\mathcal{V} \simeq \mathcal{W}$.

P Legyen $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \subset \mathbb{R}^3$ független vektorrendszer, és $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ legyen az a lineáris leképezés, melyre $A : (1,0) \mapsto \mathbf{u}$, $A : (0,1) \mapsto \mathbf{v}$. Mit mondhatunk az $\mathbb{R}^2$ és a $\mathcal{V} = \operatorname{span}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ vektortérről?

1 Mátrixleképezések, lineáris leképezések

2 2- és 3-dimenziós geometriai transzformációk mátrixa

3 Hasonlóság

4 Alterek direkt összege és a vetítés

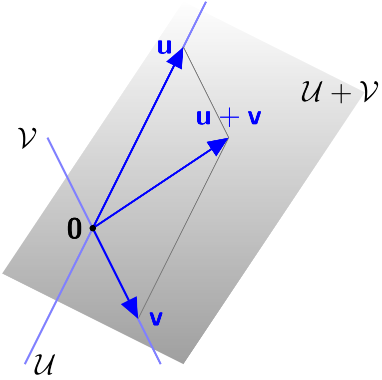
5 Merőleges vetítés és a legjobb közelítés

6 Egyenletrendszer optimális megoldása

7 Pszeudoinverz

Alterek összege és direkt összege

Á Ha $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ altér két altere, akkor az egyesítésük által generált $\mathcal{U}+\mathcal{V}$ altér pontosan azokból a vektorokból áll, melyek egy $\mathcal{U}$- és egy $\mathcal{V}$-beli vektor összegeként előállnak.



D $\mathcal{V}, \mathcal{W} \leqslant \mathcal{U}$. Amh $\mathcal{W}$ a $\mathcal{V}$ kiegészítő altere (komplementer altere), vagy hogy $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ egymás kiegészítő (komplementer) alterei, ha

$$\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{\mathbf{0}\}, \quad \mathcal{V} + \mathcal{W} = \mathcal{U},$$

T $\mathcal{V}, \mathcal{W} \leqslant \mathcal{U}$. $\mathcal{V}$ egy bázisa $\{\, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \,\}$, $\mathcal{W}$ egy bázisa $\{\, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k \,\}$. Az alábbi állítások ekvivalensek:

1. $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{\mathbf{0}\}$ és $\mathcal{V} + \mathcal{W} = \mathcal{U}$, azaz $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ kiegészítő alterek,
2. $\mathcal{U}$ minden vektora egyértelműen előáll egy $\mathcal{V}$- és egy $\mathcal{W}$-beli vektor összegeként,
3. $\{\, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \,\} \cup \{\, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k \,\}$ az $\mathcal{U}$ vektortér egy bázisa,
4. $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{\mathbf{0}\}$ és $\dim \mathcal{V} + \dim \mathcal{W} = \dim \mathcal{U}$.

D Ha a $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ alterek $\mathcal{U}$ kiegészítő alterei, akkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{U}$ a $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ alterek **direkt összege**, amit $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$ jelöl.

D Ha $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$,. . . , $\mathcal{V}_k$ alterei $\mathcal{W}$-nek, és $\mathcal{W}$ minden vektora egyértelműen áll elő $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_k$ alakban ($\mathbf{v}_i \in \mathcal{V}_i$), akkor amh $\mathcal{W}$ vektortér a $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$,. . . , $\mathcal{V}_k$ terek direkt összege.

$\mathcal{W} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_k$

D Tudjuk, hogy ha $\mathbb{R}^n = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$, azaz $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ kiegészítő alterek, akkor a tér bármely $\mathbf{u}$ vektora egyértelműen előáll $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ alakban, ahol $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$.

Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{v}$ vektor az $\mathbf{u}$ vektornak a $\mathcal{V}$ altérre $\mathcal{W}$ mentén való vetülete, vagy $\mathcal{W}$-vel párhuzamosan vett, $\mathcal{V}$-re való vetülete.

A $P : \mathbf{u} \mapsto \mathbf{v}$ leképezést vetítésnek vagy projekciónak nevezzük.

Á A $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vetítésre:

1. P lineáris transzformáció,
2. P az $\operatorname{Im} P$-re $\operatorname{Ker} P$ mentén való vetítés,
3. $I - P$ is vetítés a $\operatorname{Ker} P$-re $\operatorname{Im} P$ mentén, azaz $\operatorname{Ker}(I - P) = \operatorname{Im} P$, $\operatorname{Im}(I - P) = \operatorname{Ker} P$,
4. $\mathbb{R}^n$-nek van olyan bázisa, melyben a mátrixa
$$\mathbf{P} = \operatorname{diag}(1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0).$$
5. $\operatorname{r}(P) = \operatorname{trace}(P)$
6. P pontosan akkor vetítés, ha $P^2 = P$, azaz ha P idempotens.

1 Mátrixleképezések, lineáris leképezések

2 2- és 3-dimenziós geometriai transzformációk mátrixa

3 Hasonlóság

4 Alterek direkt összege és a vetítés

5 **Merőleges vetítés és a legjobb közelítés**

6 Egyenletrendszer optimális megoldása

7 Pszeudoinverz

D Egy $\mathcal{W}$ altér esetén $\mathcal{W}^\perp$ jelölte a $\mathcal{W}$-re merőleges vektorok alterét.

T Legyen $\mathcal{W}$ az n-dimenziós valós vagy komplex $\mathcal{U}$ vektortér egy altere. Ekkor

1. $\mathcal{W} \cap \mathcal{W}^\perp = \{\mathbf{0}\}$,
2. $\mathcal{W} + \mathcal{W}^\perp = \mathcal{U}$,
3. $\mathcal{U}$ minden vektora egyértelműen előáll egy $\mathcal{W}$- és egy $\mathcal{W}^\perp$-beli vektor összegeként,
4. $(\mathcal{W}^\perp)^\perp = \mathcal{W}$.

Merőleges vetítés $\mathbb{R}^n$ egy alterére

D Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektornak a $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$ altérre eső merőleges vetülete a $\mathbf{w}$ vektor, ha $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$, és $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ merőleges a $\mathcal{W}$ altérre, azaz $\mathbf{v} - \mathbf{w} \in \mathcal{W}^\perp$. A $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ vektort a $\mathbf{v}$ vektor $\mathcal{W}$ altérre merőleges összetevőjének nevezzük.

T Altérre való vetítés mátrixa: Ha $\mathcal{W}$ az $\mathbb{R}^n$ egy altere, és az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopvektorai a $\mathcal{W}$ egy bázisát alkotják (tehát $\mathbf{A}$ teljes oszloprangú), akkor a $\mathcal{W}$ altérre való merőleges vetítés, azaz a $\mathbf{proj}_\mathcal{W}$ leképezés mátrixa

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}.$$

B L! $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ és $\mathbf{w} = \mathbf{proj}_\mathcal{W}\,\mathbf{v}$.
$\mathcal{O}(\mathbf{A}) = \mathcal{W} \rightsquigarrow \exists \mathbf{x}\colon\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{w}$
$\mathcal{W}^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T}) \rightsquigarrow \mathbf{v} - \mathbf{w} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$
$\rightsquigarrow \mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{v} - \mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{v}$.
$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ invertálható, azaz $\mathbf{x} = (\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{v}$
$\mathbf{proj}_\mathcal{W}\,\mathbf{v} = \mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{v}$.

Példa

- Határozzuk meg a $(-2,1,3)$ vektornak az $(1,0,1)$ és a $(-1,2,0)$ vektorok által kifeszített síkra eső merőleges vetületét!
- Az altér bázisvektoraiból képzett mátrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ amiből } \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Így a $(-2,1,3)$ vektor merőleges vetülete

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Merőleges vetítés mátrixai

T Egy $\mathbf{P}$ mátrix pontosan akkor merőleges vetítés mátrixa, ha $\mathbf{P} = \mathbf{P}^\mathsf{T} = \mathbf{P}^2$.

B ($\Longrightarrow$) Tfh $\mathbf{P}$ egy P merőleges vetítés mátrixa $\mathbb{R}^n$ standard bázisában. Legyenek $\mathbf{A}$ oszlopai az $\mathrm{Im}(P) = \mathcal{O}(\mathbf{P})$ egy tetszőleges bázisának vektorai.

Ekkor $\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}$.

$$\mathbf{P}^2 = \left(\mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)^2 = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}$$

$$\mathbf{P}^\mathsf{T} = \left(\mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)^\mathsf{T} = \mathbf{A}\left((\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\right)^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{P}.$$

($\Longleftarrow$) Tfh $\mathbf{P} = \mathbf{P}^\mathsf{T} = \mathbf{P}^2$. (Biz: $\mathbf{P}$ az $\mathcal{O}(\mathbf{P})$-re merőlegesen vetít)
Elég megmutatni, hogy $\forall \mathbf{x}: \ \mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x} \perp \mathcal{O}(\mathbf{P})$
$\mathbf{P}^2 = \mathbf{P} \rightsquigarrow \mathbf{P}(\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x}) = \mathbf{P}\mathbf{x} - \mathbf{P}^2\mathbf{x} = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{P})$
de $\mathbf{P} = \mathbf{P}^\mathsf{T} \rightsquigarrow \mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{P}^\mathsf{T}) \rightsquigarrow \mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x} \perp \mathcal{O}(\mathbf{P})$.

Példa

- Igazoljuk, hogy az

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

  mátrixok merőleges vetítés mátrixai! Hány dimenziós térre vetítenek?

Altértől való távolság

D $\mathbf{x}$-nek a $\mathcal{W} \leqslant \mathbb{R}^n$ altértől való távolságán a $\mathcal{W}$ altér $\mathbf{x}$-hez legközelebbi $\mathbf{w}$ vektorának tőle való távolságát értjük. E vektort az $\mathbf{x}$ vektor $\mathcal{W}$-beli legjobb közelítésének nevezzük.

T Legjobb közelítés tétele Adva van $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{W} \leqslant \mathbb{R}^n$. Az $\mathbf{x}$ vektornak egyetlen $\mathcal{W}$-beli legjobb $\hat{\mathbf{x}}$ közelítése van, nevezetesen $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{x}$.

B L! $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$: $\mathbf{x} - \mathbf{w} = (\mathbf{x} - \mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{x}) + (\mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{x} - \mathbf{w})$.

$\mathbf{x} - \mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{x} \in \mathcal{W}^{\perp}$, $\mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{x} - \mathbf{w} \in \mathcal{W}$

alkalmazható rájuk Pithagorász tétele:

$$|\mathbf{x} - \mathbf{w}|^2 = |\mathbf{x} - \mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{x}|^2 + |\,\mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{x} - \mathbf{w}|^2.$$

■ Így

$$|\mathbf{x} - \mathbf{w}|^2 \geq |\mathbf{x} - \mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{x}|^2,$$

és egyenlőség csak akkor állhat fönn, ha $\mathbf{w} = \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{x}$, ami egyúttal a legjobb közelítés egyértelműségét is bizonyítja.

Vektor felbontása merőleges összetevőkre

T $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{W} \leqslant \mathbb{R}^n$. Az $\mathbf{x}$ vektor egyértelműen felbomlik egy $\mathcal{W}$-beli $\mathbf{w}$ és egy $\mathcal{W}$-re merőleges $\mathbf{w}^\perp$ vektor összegére, nevezetesen $\mathbf{w} = \mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{x}$ és $\mathbf{w}^\perp = \mathbf{x} - \mathbf{w}$.

B Tfh létezik két felbontás: $\mathbf{x} = \mathbf{w} + \mathbf{w}^\perp = \mathbf{v} + \mathbf{v}^\perp$

$\rightsquigarrow \underbrace{\mathbf{v} - \mathbf{w}}_{\in \mathcal{W}} = \underbrace{\mathbf{w}^\perp - \mathbf{v}^\perp}_{\in \mathcal{W}^\perp}.$

$\rightsquigarrow \mathbf{v} = \mathbf{w}$

Példa

- L! $\mathcal{W} = \operatorname{span}((1,-1,1,0),(0,1,-1,0)) \leqslant \mathbb{R}^4$, $\mathbf{x} = (8,4,2,1)$. Bontsuk fel az $\mathbf{x}$ vektort $\mathcal{W}$-be eső és $\mathcal{W}$-re merőleges vektorok összegére.
- A $\mathcal{W}$-re való merőleges vetítés mátrixa $\mathbf{P} = \mathbf{W}(\mathbf{W}^\mathsf{T}\mathbf{W})^{-1}\mathbf{W}^\mathsf{T}$, ahol $\mathbf{W}$ két oszlopa a megadott két bázisvektor, tehát

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{amiből} \quad \mathbf{P}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Így $\mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{x} = (8,1,-1,0)$ és $\mathbf{x} - \mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{x} = (0,3,3,1)$. Egyszerű számítással ellenőrizhető, hogy a $(8,1,-1,0) \in \mathcal{W}$ és hogy $(0,3,3,1) \perp \mathcal{W}^\perp$, azaz merőleges a $\mathcal{W}$-t kifeszítő bázisvektorok mindegyikére.

A véges test esete: Páratlanváros

- Páratlanváros ügyeit hatékonyan intézi:
  1. minden bizottság páratlan sok tagból áll,
  2. bármely két bizottságnak csak páros sok közös tagja lehet.
- Ha a lakók száma v, legföljebb v bizottságot tudnak létrehozni.
- Lakók: $\{1, 2, \ldots, v\}$, bizottságok: $\{B_1, \ldots, B_b\}$, és legyen

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i \in B_j, \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases} \qquad \mathbf{M} = [m_{ij}]_{v \times b}.$$

- a $b \times b$-es $\mathbf{M}^\mathsf{T}\mathbf{M}$-ben $[\mathbf{M}^\mathsf{T}\mathbf{M}]_{ij}$ eleme $B_i \cap B_j$ halmaz elemszámát adja, ami $i = j$ esetén páratlan, $i \neq j$ esetén páros.
- $\mathbb{F}_2$ fölött tekintjük: $\mathbf{M}^\mathsf{T}\mathbf{M} = \mathbf{I}_b$
- $\rightsquigarrow \mathrm{r}(\mathbf{M}^\mathsf{T}\mathbf{M}) = b \rightsquigarrow \mathrm{r}(\mathbf{M}) \geqslant b$
- $\mathbf{M} \in \mathbb{F}_2^{v \times b} \rightsquigarrow \mathrm{r}(\mathbf{M}) = b$, $\mathrm{r}(\mathbf{M}) \leqslant v$
- $\rightsquigarrow b \leqslant v$.

A véges test esete: Párosváros

- Párosváros ügyeit megfontoltan intézi:
  1. minden bizottság páros sok tagból áll,
  2. bármely két bizottságnak csak páros sok közös tagja lehet.
- Ha a lakók száma v, legföljebb $2^{\lfloor v/2 \rfloor} - 1$ bizottságot tudnak létrehozni.
- $\mathbb{F}_2$ fölött: $\mathbf{M}^\mathsf{T}\mathbf{M} = \mathbf{O}$, azaz $\mathbf{M}$ minden oszlopvektora merőleges mindegyik másikra
- $\mathcal{W} = \operatorname{span}(\mathbf{M}_{*1}, \mathbf{M}_{*2}, \dots, \mathbf{M}_{*b}\}$, így bármely $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{W}$-re:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (x_1\mathbf{M}_{*1} + \ldots + x_b\mathbf{M}_{*b}) \cdot (y_1\mathbf{M}_{*1} + \ldots + y_b\mathbf{M}_{*b}) = \sum_{i,j} x_i y_j \mathbf{M}_{*i}\mathbf{M}_{*j} = 0.$$

- $\rightsquigarrow \mathcal{W} \leqslant \mathcal{W}^\perp$, de $\dim \mathcal{W} + \dim \mathcal{W}^\perp = \dim \mathbb{F}_2^v = v \rightsquigarrow \dim \mathcal{W} \leqslant v/2$
- $\mathcal{W}$ elemszáma legföljebb $2^{\lfloor v/2 \rfloor} - 1$ (üres részhalmaz kizárva).
- A korlát el is érhető $\lfloor v/2 \rfloor$ házaspárral.

1 Mátrixleképezések, lineáris leképezések

2 2- és 3-dimenziós geometriai transzformációk mátrixa

3 Hasonlóság

4 Alterek direkt összege és a vetítés

5 Merőleges vetítés és a legjobb közelítés

6 Egyenletrendszer optimális megoldása

7 Pszeudoinverz

Inkonzisztens egyenletrendszerek

- $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ pontosan akkor konzisztens, ha $\mathbf{b} \in \mathcal{O}(\mathbf{A})$. Inkonzisztens esetben mit tehetünk?

D Keressünk olyan $\mathbf{x}$ megoldást, melyre $\mathbf{Ax}$ a legközelebb van $\mathbf{b}$-hez (azaz $(\mathbf{b} - \mathbf{Ax})^2$ a legkisebb).

- E megoldásokat az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer **optimális megoldásainak** vagy a **legkisebb négyzetek elve szerinti megoldásainak** nevezzük.
- L! $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})}\,\mathbf{b}$, és az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer helyett oldjuk meg az $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{b}}$ egyenletrendszert!

T Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer optimális megoldásai megegyeznek az

$$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$$

egyenletrendszer megoldásaival. Ezek közül egyetlen egy esik az $\mathbf{A}$ mátrix sorterébe, a legkisebb abszolút értékű.

- Neve: normálegyenlet-rendszer vagy normálegyenlet

B $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ opt. megoldásai $=$ $\mathbf{A\hat{x}} = \mathbf{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})}\,\mathbf{b}$ megoldásai

- ($\hat{\mathbf{x}}$ opt.mo. $\Rightarrow \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$)

  $\mathbf{b} - \mathbf{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})}\,\mathbf{b} \perp \mathcal{O}(\mathbf{A}) \rightsquigarrow \mathbf{A}^\mathsf{T}$ nullterében van:
  $\mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{b} - \mathbf{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})}\,\mathbf{b}) = \mathbf{0}$.

  $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})}\,\mathbf{b} \rightsquigarrow \mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}, \rightsquigarrow \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$.

- ($\hat{\mathbf{x}}$: $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b} \Rightarrow \hat{\mathbf{x}}$ opt.mo.)

  $\mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T}) \rightsquigarrow \mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} \perp \mathcal{O}(\mathbf{A})$

  $\mathbf{b} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + (\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}})$ – felbontás két merőleges vektor összegére

  a merőleges vetület definíciója szerint $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})}\,\mathbf{b}$, ($\hat{\mathbf{x}}$ opt.mo.)

  egyetlen egy mo. van $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ sorterében, és az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}$ sorterei pedig megegyeznek!

- $\mathcal{S}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}) = \mathcal{S}(\mathbf{A})$, mert $\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \mathbf{0}$, azaz $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})$

  ugyanis $\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ esetén
  $\mathbf{0} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{Ax} = (\mathbf{Ax})^\mathsf{T}(\mathbf{Ax}) \Rightarrow \mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.

Példa: egyenletrendszer optimális megoldásai

- Határozzuk meg az

$$\begin{aligned} y + z &= 3 \\ x + y + 2z &= 2 \\ x \phantom{{}+y} + z &= 2 \end{aligned}$$

egyenletrendszert optimális megoldásait, és a min. absz. értékűt!

- Az egyenletrendszer inkonzisztens: $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

- A normálegyenlet: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$.

- Az összes megoldás:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{így} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

Példa folytatása: a minimális abszolút értékű

- A minimális abszolút értékű = sortérbe eső megoldás: az eredeti egyenletrendszer kiegészítésével:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- A sortérbe eső megoldás $(0, 1, 1)$, azaz az összes megoldás ezzel fölírva:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

Lineáris regresszió

- $y = a + bx$ változóira méréseket végzünk, hogy meghatározzuk a és b értékét.
- n mérés után $\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$.
- normálegyenlet
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$
- kifejtve $\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$
- Az $y = \hat{a} + \hat{b}x$ egyenest regressziós egyenesnek nevezzük, mely a megadott adatokra a legkisebb négyzetek elve szerinti legjobban illeszkedő egyenes.

T Az (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \dots n)$ párokhoz tartozó, $y = \hat{a} + \hat{b}x$ egyenletű regressziós egyenes paraméterei kielégítik az

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$$

egyenletet. Ez egyértelműen megoldható, ha van legalább két különböző x_i érték.

B még bizonyítandó az egyértelműség: a számtani és négyzetes közép közti összefüggés szerint bármely x_i $(i = 1, 2 \dots, n)$ valósokra

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}},$$

és egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha $x_1 = \cdots = x_n$.

- Mivel az együtthatómátrix determinánsa $n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2$, ezért a számtani és négyzetes közép közti összefüggés miatt ez csak akkor lehet 0, ha az x_i értékek mind azonosak.

Polinomiális regresszió

- Keressünk az $a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k$ polinom együtthatóira optimális becslést a legkisebb négyzetek módszerével, ha az (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \ldots n)$ párok sorozatát ismerjük.
- Keresendő az n egyenletből álló $k + 1$-ismeretlenes

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1x_1 + \ldots + a_kx_1^k &= y_1\\
a_0 + a_1x_2 + \ldots + a_kx_2^k &= y_2\\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots\\
a_0 + a_1x_n + \ldots + a_kx_n^k &= y_n
\end{aligned}$$

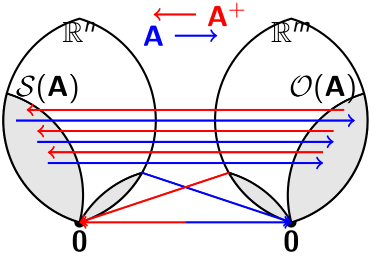
egyenletrendszer megoldása az a_0, a_1,..., a_k ismeretlenekre.

- Mátrixalak

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^k \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \text{ azaz } \mathbf{Xa} = \mathbf{y}.$$

1. Mátrixleképezések, lineáris leképezések
2. 2- és 3-dimenziós geometriai transzformációk mátrixa
3. Hasonlóság
4. Alterek direkt összege és a vetítés
5. Merőleges vetítés és a legjobb közelítés
6. Egyenletrendszer optimális megoldása
7. Pszeudoinverz

Pszeudoinverz – általánosított inverz



- $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ sortérbe eső optimális megoldása megkapható egy $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^+\mathbf{b}$ képlettel?
- $\mathbf{Ax} = \hat{\mathbf{b}}(= \mathbf{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})}\,\mathbf{b})$ egyenlet mindig megoldható, sortérbe eső $\hat{\mathbf{x}}$ megoldására $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^+\mathbf{b} = \mathbf{A}^+\hat{\mathbf{b}}$ kéne!
  $\rightsquigarrow \mathbf{A}^+(\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}}) = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T}) \Rightarrow \mathbf{A}^+\mathbf{z} = \mathbf{0}$.
- Az inverz fogalmának sokféle általánosítása van.

Moore – Penrose-féle pszeudoinverz

Definíció (A Moore – Penrose-féle pszeudoinverz)

Legyen $\mathbf{A}$ egy $m \times n$-es valós mátrix. **Pszeudoinverzén** vagy **Moore – Penrose-féle pszeudoinverzén** azt az $\mathbf{A}^+$-szal jelölt mátrixot értjük, amellyel

1. $\mathbf{A}^+$ hatása $\mathcal{O}(\mathbf{A})$-n: a sortér minden $\mathbf{x}$ vektorára $\mathbf{A}^+(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{x}$,
2. $\mathbf{A}^+$ hatása $\mathcal{O}(\mathbf{A})^\perp$-én: minden $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$ vektorra $\mathbf{A}^+\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

- $m \times n$-es mátrix pszeudoinverze $n \times m$-es
- $\mathbf{A}^+$-hoz tartozó mátrixleképezés hatását ismerjük az $\mathcal{O}(\mathbf{A})$ altéren és merőleges kiegészítő alterén, ezeken definíció alapján lineáris $\rightsquigarrow$ az egész térre kiterheszthető lineárisan $\rightsquigarrow$ létezik és egyértelmű!
- $\mathcal{N}(\mathbf{A}^+) = \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$, és $\mathcal{S}(\mathbf{A}^+) = \mathcal{N}(\mathbf{A}^+)^\perp$, így $\mathcal{S}(\mathbf{A}^+) = \mathcal{S}(\mathbf{A}^\mathsf{T}) = \mathcal{O}(\mathbf{A})$.

Néhány pszeudoinverz

- $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^{-1}$, ha $\mathbf{A}$ invertálható,
- $\mathbf{O}^+_{m\times n} = \mathbf{O}_{n\times m}$,
- $[a]^+ = [{}^1\!/\!_a]$, ha $a \neq 0$, és $[0]^+ = [0]$,
- $(\mathbf{A}^+)^+ = \mathbf{A}$,
- ha $a_{ii} \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, akkor

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & 0 & \ldots & 0 & \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \mathbf{O} \\ 0 & 0 & \ldots & a_{rr} & \\ \hline & & \mathbf{O} & & \mathbf{O} \end{array}\right]^+_{m\times n} = \left[\begin{array}{cccc|c} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \ldots & 0 & \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \ldots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \mathbf{O} \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{a_{rr}} & \\ \hline & & \mathbf{O} & & \mathbf{O} \end{array}\right]_{n\times m}$$

A pszeudoinverz mátrixa

Tétel (A pszeudoinverz mátrixa)

Ha a valós $\mathbf{A}$ *mátrix teljes oszloprangú, akkor*

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}, \tag{1}$$

ha teljes sorrangú, akkor

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T})^{-1}. \tag{2}$$

Ha $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$, *ahol* $\mathbf{B}$ *egy teljes oszloprangú,* $\mathbf{C}$ *egy teljes sorrangú mátrix, akkor*

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^+ = \mathbf{C}^+\mathbf{B}^+ &= \mathbf{C}^\mathsf{T}(\mathbf{C}\mathbf{C}^\mathsf{T})^{-1}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T} \quad (3)\\ &= \mathbf{C}^\mathsf{T}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{C}^\mathsf{T})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T}. \quad (4) \end{aligned}$$

Bizonyítás

- $\mathbf{A}$ teljes oszloprangú $\rightsquigarrow$ értelmezési tartomány = sortér

$$(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

  $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{z} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A}^+\mathbf{z} = \mathbf{0}$, mert $(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{z} = (\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

- $\mathbf{A}$ teljes sorrangú $\rightsquigarrow$ oszloptér = egész tér $\rightsquigarrow$ $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ konzisztens

  $\hat{\mathbf{x}}$ az egyetlen sortérbe eső megoldás, akkor minden más $\mathbf{x}$ megoldás esetén $\mathbf{proj}_{\mathcal{S}(\mathbf{A})}\,\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} \rightsquigarrow \mathbf{A}^+\mathbf{y} = \hat{\mathbf{x}}$, ugyanis

$$\mathbf{proj}_{\mathcal{S}(\mathbf{A})}\,\mathbf{x} = \mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \left(\mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T})^{-1}\right)(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{A}^+\mathbf{y}.$$

- $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{C}$, $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{w} = \mathbf{C}\mathbf{x}$ és $\mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{w}$

  $\mathbf{B}$ teljes oszloprangú, $\mathbf{C}$ teljes sorrangú $\rightsquigarrow$ $\mathbf{C}^+\mathbf{B}^+\mathbf{y} = \mathbf{C}^+\mathbf{w} = \mathbf{x}$ *a)* ✓

  $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ oszloptere azonos $\rightsquigarrow$ $\mathbf{B}^+\mathbf{z} = \mathbf{0}$, tehát $\mathbf{C}^+\mathbf{B}^+\mathbf{z} = \mathbf{0}$ *b)* ✓

Példák

- Számítsuk ki a következő mátrixok pszeudoinverzét!

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **B** teljes oszloprangú, használjuk az (1) képletet

$$\mathbf{B}^+ = (\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}.$$

- A **C** mátrix teljes sorrangú, így a (2) képlet szerint

$$\mathbf{C}^+ = \mathbf{C}^\mathsf{T}(\mathbf{C}\mathbf{C}^\mathsf{T})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

- $\mathbf{M}$ bázisfelbontása $\mathbf{BC}$:

$$\mathbf{M}^+ = \mathbf{C}^+\mathbf{B}^+ = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- A (4) képlettel

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^+ &= \mathbf{C}^\mathsf{T}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{M}\mathbf{C}^\mathsf{T})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tétel (Moore – Penrose-tétel)

A valós $\mathbf{A}$ *mátrixnak* $\mathbf{X}$ *pontosan akkor pszeudoinverze, ha az alábbi négy feltétel mindegyike fennáll:*

$$a)\ \mathbf{AXA} = \mathbf{A}, \quad b)\ \mathbf{XAX} = \mathbf{X}, \quad c)\ (\mathbf{AX})^{\mathsf{T}} = \mathbf{AX}, \quad d)\ (\mathbf{XA})^{\mathsf{T}} = \mathbf{XA}.$$

- ($\mathbf{A}^+$ teljesíti e feltételeket)

$$\begin{aligned}
\mathbf{AA}^+\mathbf{A} &= \mathbf{AR}^{\mathsf{T}}(\mathbf{RR}^{\mathsf{T}})^{-1}(\mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{A} \\
&= \mathbf{BRR}^{\mathsf{T}}(\mathbf{RR}^{\mathsf{T}})^{-1}(\mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{BR} = \mathbf{BR} = \mathbf{A} \\
\mathbf{A}^+\mathbf{AA}^+ &= \mathbf{R}^{\mathsf{T}}(\mathbf{RR}^{\mathsf{T}})^{-1}(\mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{BRR}^{\mathsf{T}}(\mathbf{RR}^{\mathsf{T}})^{-1}(\mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^{\mathsf{T}} \\
&= \mathbf{R}^{\mathsf{T}}(\mathbf{RR}^{\mathsf{T}})^{-1}(\mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}^+
\end{aligned}$$

- $\mathbf{A}^+\mathbf{A} = (\mathbf{R}^\mathsf{T}(\mathbf{R}\mathbf{R}^\mathsf{T})^{-1}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T})(\mathbf{B}\mathbf{R}) = \mathbf{R}^\mathsf{T}(\mathbf{R}\mathbf{R}^\mathsf{T})^{-1}\mathbf{R}$,
  $\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = (\mathbf{B}\mathbf{R})(\mathbf{R}^\mathsf{T}(\mathbf{R}\mathbf{R}^\mathsf{T})^{-1}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T}) = \mathbf{B}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T}$.
- $(\mathbf{A}^+\mathbf{A})^\mathsf{T} = (\mathbf{R}^\mathsf{T}(\mathbf{R}\mathbf{R}^\mathsf{T})^{-1}\mathbf{R})^\mathsf{T} = \mathbf{R}^\mathsf{T}(\mathbf{R}\mathbf{R}^\mathsf{T})^{-1}\mathbf{R} = \mathbf{A}^+\mathbf{A}$
  $(\mathbf{A}\mathbf{A}^+)^\mathsf{T} = (\mathbf{B}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T})^\mathsf{T} = \mathbf{B}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T} = \mathbf{A}\mathbf{A}^+$.
- (Egyértelműség) Tfh $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ is teljesíti a 4 feltételt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{AY} &\overset{a)}{=} \mathbf{AXAY} \overset{c)}{=} (\mathbf{AX})^\mathsf{T}(\mathbf{AY})^\mathsf{T} = \mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{Y}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T} \\
&= \mathbf{X}^\mathsf{T}(\mathbf{AYA})^\mathsf{T} \overset{a)}{=} \mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T} = (\mathbf{AX})^\mathsf{T} \overset{c)}{=} \mathbf{AX} \qquad (5)\\
\mathbf{YA} &\overset{a)}{=} \mathbf{YAXA} \overset{d)}{=} (\mathbf{YA})^\mathsf{T}(\mathbf{XA})^\mathsf{T} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{Y}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{X}^\mathsf{T} \\
&= (\mathbf{AYA})^\mathsf{T}\mathbf{X}^\mathsf{T} \overset{a)}{=} \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{X}^\mathsf{T} = (\mathbf{XA})^\mathsf{T} \overset{d)}{=} \mathbf{XA} \qquad (6)\\
\mathbf{Y} &\overset{b)}{=} \mathbf{YAY} \overset{(5)}{=} \mathbf{YAX} \overset{(6)}{=} \mathbf{XAX} \overset{b)}{=} \mathbf{X}.
\end{aligned}$$

Következmény ($\mathbf{A}^+\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}\mathbf{A}^+$ merőleges vetítés)

Tetszőleges $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix esetén

$$\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{proj}_{\mathcal{S}(\mathbf{A})} \quad \textit{és} \quad \mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})}.$$

Tehát $\mathbf{A}^+\mathbf{A}$ az $\mathbb{R}^n$ teret merőlegesen vetíti $\mathbf{A}$ sorterére, míg $\mathbf{A}\mathbf{A}^+$ az $\mathbb{R}^m$ teret merőlegesen vetíti $\mathbf{A}$ oszlopterére.

- Az előzőekben bizonyítottuk, hogy $\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{R}^\mathsf{T}(\mathbf{R}\mathbf{R}^\mathsf{T})^{-1}\mathbf{R}$, ami épp az $\mathbf{R}^\mathsf{T}$ oszlopvektorai által kifeszített térre – azaz a sortérre – való merőleges vetítés mátrixa.
- Az előzőekben bizonyítottuk, hogy $\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{B}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T}$, ami a $\mathbf{B}$ oszlopvektorai által kifeszített térre – azaz az oszloptérre – való merőleges vetítés mátrixa.

A minimális abszolút értékű optimális megoldás

Tétel (Optimális megoldás pszeudoinverzzel)

Legyen $\mathbf{A}$ *egy valós mátrix. Az* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *egyenletrendszernek az* $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^+\mathbf{b}$ *a minimális abszolút értékű optimális megoldása.*

- ($\mathbf{A}^+\mathbf{b}$ optimális megoldás), azaz megoldása az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$ normálegyenlet-rendszernek
- Igazolni kell, hogy $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{b} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$.
- Elég ezt: $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^\mathsf{T}$
- $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{R}$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{A}^+ &= (\mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{B}^\mathsf{T})(\mathbf{B}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T}) \\ &= \mathbf{R}^\mathsf{T}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T} = \mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{B}^\mathsf{T} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\end{aligned}$$

- $\mathbf{A}^+\mathbf{b}$ a sortérben van, és a sortérbe csak egyetlen optimális megoldás esik

P Adjuk meg az

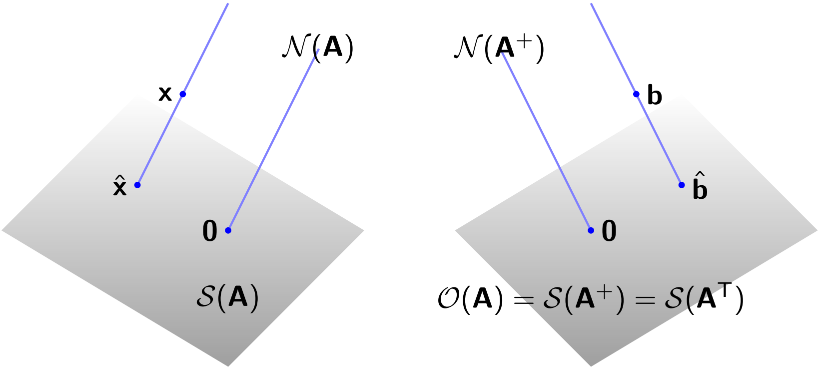
$$\begin{aligned} y + z &= 3 \\ x + y + 2z &= 2 \\ x + z &= 2 \end{aligned}$$

egyenletrendszer minimális abszolút értékű optimális megoldását!

M Az egyenletrendszer inkonzisztens, ami bővített mátrixának redukált lépcsős alakjából leolvasható.

A minimális abszolút értékű optimális megoldás

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{b} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$



$\mathcal{N}(\mathbf{A})$
$\mathbf{x}$
$\hat{\mathbf{x}}$
$\mathbf{0}$
$\mathcal{S}(\mathbf{A})$
$\mathcal{N}(\mathbf{A}^+)$
$\mathbf{b}$
$\hat{\mathbf{b}}$
$\mathbf{0}$
$\mathcal{O}(\mathbf{A}) = \mathcal{S}(\mathbf{A}^+) = \mathcal{S}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$