# Bevezetés az algebrába – Mátrixműveletek

Wettl Ferenc
Algebra Tanszék

BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

2015. november 6.

# Összeadás

- A valós számok közti műveletek természetes módon kiterjeszthetők mátrixokkal való műveletekké.
- Ezek definícióihoz az összeadás és a szorzás hétköznapi alkalmazásainak táblázatokra való kiterjesztésén keresztül fogunk eljutni.
- 3 alma meg 2 alma az 5 alma
- Azonos méretű, azonos fejlécű táblázatok összeadásának egy lehetséges módja:

| | alma (db) | szőlő (fürt) |
|---|---|---|
| piros | 3 | 2 |
| zöld | 2 | 1 |

$+$

| | alma (db) | szőlő (fürt) |
|---|---|---|
| piros | 2 | 2 |
| zöld | 0 | 1 |

$=$

| | alma (db) | szőlő (fürt) |
|---|---|---|
| piros | 5 | 4 |
| zöld | 2 | 2 |

# Szorzás számmal

- Az asztalon 2 alma van. Ha számukat megháromszorozzuk, összeszorzunk egy mértékegység nélküli számot (3) egy mértékegységgel rendelkezővel (2 darab).
- Ezt megtehetjük egy kosár egész tartalmával is:

$$3 \cdot \begin{array}{lcc} \hline & \text{alma} & \text{szőlő} \\ & \text{(db)} & \text{(fürt)} \\ \hline \text{piros} & 3 & 2 \\ \text{zöld} & 2 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{lcc} \hline & \text{alma} & \text{szőlő} \\ & \text{(db)} & \text{(fürt)} \\ \hline \text{piros} & 9 & 6 \\ \text{zöld} & 6 & 3 \\ \hline \end{array}$$

# Táblázatok szorzása

- Egy adag (10 dkg) alma energiatartalma 30 kcal, 5 adag energiatartalma
$$5\,\text{adag}\cdot 30\,\frac{\text{kcal}}{\text{adag}} = 150\,\text{kcal}.$$
- Gyümölcssaláták (A, B, C), gyümölcsök (alma, banán, narancs), tartalmuk (szénhidrát- és energiatartalom).
- Két táblázat: a sorokba kerülnek azok a tételek, melyek tartalmát az oszlopokban részletezzük:

| | Alma (adag) | Banán (adag) | Narancs (adag) |
|---|---|---|---|
| A | 5 | 1 | 4 |
| B | 4 | 4 | 2 |
| C | 4 | 2 | 4 |

| | Szénhidrát (g/adag) | Energia (kcal/adag) |
|---|---|---|
| Alma | 7 | 30 |
| Banán | 24 | 105 |
| Narancs | 8 | 40 |

# Táblázatok szorzása (folytatás)

- Az A saláta energiatartalma:

$$5\,\text{adag} \cdot 30\,\frac{\text{kcal}}{\text{adag}} + 1\,\text{adag} \cdot 105\,\frac{\text{kcal}}{\text{adag}} + 4\,\text{adag} \cdot 40\,\frac{\text{kcal}}{\text{adag}} = 415\,\text{kcal},$$

| | Szénhidrát (g/adag) | Energia (kcal/adag) |
|---|---|---|
| Alma | 7 | 30 |
| Banán | 24 | 105 |
| Narancs | 8 | 40 |

| | Alma (adag) | Banán (adag) | Narancs (adag) |
|---|---|---|---|
| A | 5 | 1 | 4 |
| B | 4 | 4 | 2 |
| C | 4 | 2 | 4 |

| | Szénhidrát (g) | Energia (kcal) |
|---|---|---|
| A | 91 | 415 |
| B | 140 | 620 |
| C | 108 | 490 |

# Lineáris helyettesítés

**Definíció (Lineáris helyettesítés)**

Lineáris helyettesítésről beszélünk, ha változók egy halmazát más változók konstansszorosainak összegeként állítjuk elő.

- Legyen pl.

$$\begin{aligned} a &= 5x + y + 4z \\ b &= 4x + 4y + 2z \\ c &= 4x + 2y + 4z \end{aligned} \quad \text{és} \quad \begin{aligned} x &= 7s + 30k \\ y &= 24s + 105k \\ z &= 8s + 40k \end{aligned}$$

- Egy pillanatra visszalépünk (táblázatosítunk)

| | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | 5 | 1 | 4 |
| $b$ | 4 | 4 | 2 |
| $c$ | 4 | 2 | 4 |

| | $s$ | $k$ |
|---|---|---|
| $x$ | 7 | 30 |
| $y$ | 24 | 105 |
| $z$ | 8 | 40 |

# Lineáris helyettesítések kompozíciója

- **kompozíció**: egymás után való elvégzés
- Az $a = 5x + y + 4z$ kifejezésben helyettesítsük $x$, $y$ és $z$ helyébe a második lineáris helyettesítés szerinti kifejezéseket

$$a = 5x+y+4z = 5(7s+30k)+(24s+105k)+4(8s+40k) = 91s+415k.$$

- Pl. $k$ együtthatója

$$5 \cdot 30 + 1 \cdot 105 + 4 \cdot 40 = 415.$$

- 

| | $s$ | $k$ |
|---|---|---|
| $x$ | 7 | 30 |
| $y$ | 24 | 105 |
| $z$ | 8 | 40 |

| | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | 5 | 1 | 4 |
| $b$ | 4 | 4 | 2 |
| $c$ | 4 | 2 | 4 |

| | $s$ | $k$ |
|---|---|---|
| $a$ | 91 | 415 |
| $b$ | 140 | 620 |
| $c$ | 108 | 490 |

# Mátrixok

- $S$ fölötti $m \times n$ típusú mátrixok tere $S^{m\times n}$ vagy $\mathrm{M}_{m\times n}[S]$, ahol $S$ egy halmaz (pl. $S = \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}\dots$)
- Két mátrixot akkor tekintünk egyenlőnek, ha azonos típusúak, és az azonos indexű elemek egyenlőek.
- Például

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

- négyzetes mátrix, főátló, diagonális mátrix,

$$\operatorname{diag}(1,2,3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

# Elemenkénti mátrixműveletek

- $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ azonos típusúak:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij}] + [b_{ij}] := [a_{ij} + b_{ij}], \quad \mathbf{A} - \mathbf{B} = [a_{ij}] - [b_{ij}] := [a_{ij} - b_{ij}].$$

- Zérusmátrix: $\mathbf{O}_{m \times n}$, $\mathbf{O}_n$
- $c$ skalárral szorzás

$$c\mathbf{A} = c[a_{ij}] := [ca_{ij}].$$

-  $\circledcirc$  $=$ 
- Mátrixokra is definiálhatjuk a **lineáris kombináció**, a **lineáris függetlenség** és a **kifeszített altér** fogalmát.

# Mátrixszorzás

D Egy $m \times t$-s **A** és egy $t \times n$-es **B** mátrix szorzatán azt az **AB**-vel jelölt $m \times n$-es **C** mátrixot értjük, amelynek $i$-edik sorában és $j$-edik oszlopában álló eleme

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj} + \ldots + a_{it}b_{tj} = \sum_{k=1}^{t} a_{ik}b_{kj} = \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{b}_{*j}$$

$$\begin{bmatrix} & b_{1j} & \\ & b_{2j} & \\ & \vdots & \\ & b_{tj} & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{it} \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ & c_{ij} & \\ \\ \end{bmatrix}$$

**A** **B**

$m \times s$ $t \times n$

feltéve, hogy
$s = t$

**AB** típusa
$m \times n$

# Műveletek blokkmátrixokkal

- Hatalmas méretű mátrixokkal végzett műveletek párhuzamosíthatók, és a memóriakezelésük is hatékonyabbá válik, ha a mátrixokat vízszintes és függőleges vonallal részmátrixokra, ún. blokkokra osztjuk.
- Ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ azonos típusú, azonos módon particionált blokkmátrix, akkor
$$c[\mathbf{A}_{ij}] := [c\mathbf{A}_{ij}], \qquad [\mathbf{A}_{ij}] + [\mathbf{B}_{ij}] := [\mathbf{A}_{ij} + \mathbf{B}_{ij}].$$
- Ha $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{ik}]_{m\times t}$, $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_{kj}]_{t\times n}$ két blokkmátrix, és minden $k$-ra az $\mathbf{A}_{ik}$ blokk oszlopainak száma megegyezik $\mathbf{B}_{kj}$ sorainak számával, akkor a $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ szorzatra
$$\mathbf{C}_{ij} = \sum_{k=1}^{t} \mathbf{A}_{ik}\mathbf{B}_{kj}.$$

# Műveletek blokkmátrixokkal

- Végezzük el az alábbi műveletet kétféleképpen is!

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} 1 & 4 \\ \hline 1 & 1 \\ 6 & 0 \end{array}\right].$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 6 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 2 & 6 \\ \hline 4 & 6 \\ 9 & 7 \end{array}\right]$$

# Skaláris szorzat és diadikus szorzat mátrixszorzatos alakja

- $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, ekkor
$$\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b},$$
- $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Az $\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T}$ szorzatot a két vektor **diadikus szorzatának**, röviden **diádnak** nevezzük. E szorzat egy $m \times n$-es mátrix:
$$\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & \dots & u_1 v_n \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & \dots & u_2 v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_m v_1 & u_m v_2 & \dots & u_m v_n \end{bmatrix}.$$
- $\mathbf{u} = (1, 0, 2)$, $\mathbf{v} = (3, 2, 1)$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = ?$, $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = ?$
$$\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 5, \quad \mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

# Lineáris egyenletrendszer mátrixszorzatos alakja

- Ha $\mathbf{A}$ jelöli egy egyenletrendszer együtthatómátrixát, illetve $\mathbf{b}$ a konstans tagok és $\mathbf{x}$ az ismeretlenek oszlopvektorát, azaz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \text{és} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

akkor az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

egyenletrendszer $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ alakba írható.

- $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5$, $\begin{aligned} ax \qquad\qquad &= u \\ by \qquad &= v \\ cz &= w \end{aligned}$ és $\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ y &= 1 \\ 0 &= 1 \end{aligned}$
- mátrixszorzatos alakjaik rendre:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 5, \quad \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- A szimultán egyenletrendszerek $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ alakba írhatók, pl.:

$$\begin{aligned} 2x_{11} + 3x_{21} &= 7 \qquad & 2x_{12} + 3x_{22} &= 9 \\ 3x_{11} - 4x_{21} &= 2 \qquad & 3x_{12} - 4x_{22} &= 5 \end{aligned}$$

- $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$

# Lineáris helyettesítés mátrixszorzatos alakja

- Hasonlóan az egyenletrendszer mátrixszorzatos alakjához, pl.:

$$\begin{aligned} x &= 3a + 2b + 4c \\ y &= \phantom{3}a - 3b + 2c \\ z &= 2a - \phantom{3}b + 2c \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

# Szorzás vektorral

**Állítás (Mátrixszorzás és lineáris kombináció)**

*Legyen* $\mathbf{A}$ $m \times n$*-es mátrix,* $\mathbf{x}$ $n$*-dimenziós,* $\mathbf{y}$ $m$*-dimenziós vektor. Ekkor az* $\mathbf{Ax}$ *szorzat az* $\mathbf{A}$ *oszlopvektorainak*

$$\mathbf{a}_{*1}x_1 + \mathbf{a}_{*2}x_2 + \cdots + \mathbf{a}_{*n}x_n$$

*lineáris kombinációját, míg az* $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ *szorzat az* $\mathbf{A}$ *sorvektorainak*

$$\mathbf{a}_{1*}y_1 + \mathbf{a}_{2*}y_2 + \cdots + \mathbf{a}_{m*}y_m$$

*lineáris kombinációját adja.*

# Altér felírása mátrixszorzattal

- Egy homogén lin. egyenletrendszer és redukált lépcsős alakja:

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&3&4&5\\2&3&5&7&11\\0&1&1&1&-1\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&3&4&5\\0&1&1&1&-1\\0&0&0&0&0\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&1&2&7\\0&1&1&1&-1\end{array}\right].$$

- A megoldások lineáris kombinációk, így mátrixszorzat alakba is felírhatók:

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=t_1\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+t_2\begin{bmatrix}-2\\-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}+t_3\begin{bmatrix}-7\\1\\0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-2&-7\\-1&-1&1\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_1\\t_2\\t_3\end{bmatrix}.$$

- Ha $\mathbf{rref}(\mathbf{A})=[\mathbf{I}|\mathbf{S}]$, akkor az $[\mathbf{A}|\mathbf{0}]$ egyenletrendszer megoldása

$$\left[\begin{array}{c}-\mathbf{S}\\\hline\mathbf{I}\end{array}\right]\mathbf{t}.$$

# Szorzás standard egységvektorral

## Állítás (Mátrix elemeinek, sor- és oszlopvektorainak előállítása)

*Legyen $\mathbf{A}$ egy $m \times n$-es mátrix, $\mathbf{e}_i$ $m$-dimenziós, $\mathbf{e}_j$ $n$-dimenziós standard egységvektor. Ekkor*

$$\mathbf{e}_i^\mathsf{T}\mathbf{A} = \mathbf{a}_{i*},\ \ \mathbf{A}\mathbf{e}_j = \mathbf{a}_{*j},\ \ \textit{továbbá}\ \mathbf{e}_i^\mathsf{T}(\mathbf{A}\mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_i^\mathsf{T}\mathbf{A})\mathbf{e}_j = a_{ij}.$$

Az $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^\mathsf{T}$ diád $(i, j)$-indexű eleme 1, az összes többi 0:

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

# A báziscsere mátrixszorzatos alakja

- Áttérés standard bázisra: $\mathcal{B} = \{\,(1,2,3),(0,2,3),(3,5,8)\,\}$ az $\mathbb{R}^3$ egy bázisa. Írjuk fel $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ standard bázisbeli koordinátás alakját egyetlen mátrixszorzással. (Pl. $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (3,2,-1)$)
- $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (3,2,-1)$ azt jelenti, hogy

$$\mathbf{v} = 3\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}0\\2\\3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3\\5\\8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\5\\7\end{bmatrix}, \quad \text{azaz } \mathbf{v} = \begin{bmatrix}1&0&3\\2&2&5\\3&3&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\5\\7\end{bmatrix}.$$

Legyen $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (x,y,z)$. Ekkor

$$\mathbf{v} = x\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}0\\2\\3\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}3\\5\\8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&3\\2&2&5\\3&3&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}.$$

# A báziscsere mátrixszorzatos alakja 2

## Definíció (Áttérés mátrixa)

Legyen $\mathcal{B} = \{\, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n \,\}$ a $\mathcal{V}$ egy bázisa és $\mathcal{C}$ egy $\mathcal{V}$-t tartalmazó vektortér egy bázisa (pl. a $\mathcal{V}$ vektortéré). Az

$$\mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = [\, [\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} \mid [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}} \mid \cdots \mid [\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}} \,]$$

mátrixot a $\mathcal{B}$ bázisról a $\mathcal{C}$-re való áttérés mátrixának nevezzük.

## Állítás (Koordináták változása a bázis cseréjénél)

*Ha $\mathcal{B}$ a $\mathcal{V}$ vektortér bázisa, és $\mathcal{C}$ egy $VT$-t tartalmazó tér bázisa, akkor bármely $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektorra*

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = \mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}.$$

B Legyen $[\mathbf{v}]_\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. A koordinátás alak jelentése szerint

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{b}_1 + v_2\mathbf{b}_2 + \ldots + v_n\mathbf{b}_n.$$

Ennek koordinátás alakja a $\mathcal{C}$ bázisban

$$\begin{aligned}[\mathbf{v}]_\mathcal{C} &= v_1[\mathbf{b}_1]_\mathcal{C} + v_2[\mathbf{b}_2]_\mathcal{C} + \ldots + v_n[\mathbf{b}_n]_\mathcal{C}\\ &= \left[\,[\mathbf{b}_1]_\mathcal{C} \mid [\mathbf{b}_2]_\mathcal{C} \mid \cdots \mid [\mathbf{b}_n]_\mathcal{C}\,\right][\mathbf{v}]_\mathcal{B}\\ &= \mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_\mathcal{B}.\end{aligned}$$

P $\mathcal{E}$ az $\mathbb{R}^4$ standard bázisa, és $\mathcal{B} = \{(1,1,0,-2),(2,3,3,-2)\}$. vektorok által kifeszített altér. Írjuk fel az $\mathbf{A}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$ mátrixot és adjuk meg a $(-1,1)_{\mathcal{B}}$ és a $(-3,2)_{\mathcal{B}}$ vektorok $\mathcal{E}$-beli koordinátás alakját!

M Az áttérés mátrixa

$$\mathbf{A}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = [\,[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{E}} \mid [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{E}}\,] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Így a két vektor koordinátás alakja a standard bázisban

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

# Bázisfelbontás

**Állítás (Bázisfelbontás)**

*Legyen* **A** *redukált lépcsős alakja a zérussorok nélkül* **R**, *az* **A** *főszlopaiból álló mátrix* **B**. *Ekkor*

$$\mathbf{A} = \mathbf{BR}.$$

P Írjuk fel az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ bázisfelbontását!

B Redukált lépcsős alak: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

Innen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{BR}.$

# Egységmátrix, elemi mátrixok

- $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.
- Az $n \times n$-es $\mathbf{I}_n := \operatorname{diag}(1, 1, \dots, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ mátrixot egységmátrixnak nevezzük.
- Az $\mathbf{I}_n$ egységmátrixon végrehajtott egyetlen elemi sorművelettel kapott mátrixot **elemi mátrixnak** nevezzük.
- Az alábbi mátrixok elemi mátrixok:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

# Szorzás elemi mátrixszal

- Mit veszünk észre az alábbi szorzások eredményén?

$$\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\\a_{41}&a_{42}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{41}&a_{42}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\\a_{11}&a_{12}\end{bmatrix},$$

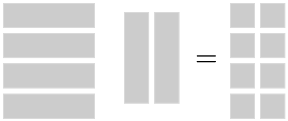
$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&5&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\\a_{41}&a_{42}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\5a_{21}&5a_{22}\\a_{31}&a_{32}\\a_{41}&a_{42}\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\\a_{41}&a_{42}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}+2a_{31}&a_{12}+2a_{32}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\\a_{41}&a_{42}\end{bmatrix}.$$

# Elemi sorművelet mátrixszorzással

- Legyen $\mathbf{E}$ az az elemi mátrix, melyet $\mathbf{I}_m$-ből egy elemi sorművelettel kapunk. Ha ugyanezt a sorműveletet egy tetszőleges $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixra alkalmazzuk, akkor eredményül az $\mathbf{EA}$ mátrixot kapjuk.

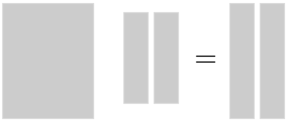
# Vektorokra particionálás: [sorvektorok] · [oszlopvektorok]



$m \times 1 \quad 1 \times n \quad m \times n$

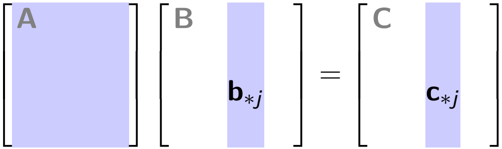
$$\mathbf{AB} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{a}_{1*} \\ \hline \mathbf{a}_{2*} \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{a}_{m*} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{b}_{*1} & \dots & \mathbf{b}_{*n} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1*}\mathbf{b}_{*1} & \mathbf{a}_{1*}\mathbf{b}_{*2} & \dots & \mathbf{a}_{1*}\mathbf{b}_{*n} \\ \mathbf{a}_{2*}\mathbf{b}_{*1} & \mathbf{a}_{2*}\mathbf{b}_{*2} & \dots & \mathbf{a}_{2*}\mathbf{b}_{*n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{m*}\mathbf{b}_{*1} & \mathbf{a}_{m*}\mathbf{b}_{*2} & \dots & \mathbf{a}_{m*}\mathbf{b}_{*n} \end{bmatrix}.$$

# Vektorokra particionálás: [mátrix] · [oszlopvektorok]

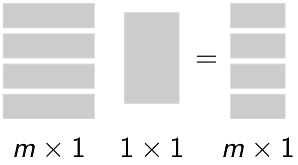


$1 \times 1 \quad 1 \times n \quad 1 \times n$

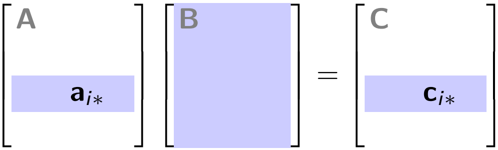
$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \mathbf{A}\left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{b}_{*1} & \mathbf{b}_{*2} & \dots & \mathbf{b}_{*n} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{Ab}_{*1} & \mathbf{Ab}_{*2} & \dots & \mathbf{Ab}_{*n} \end{array}\right]$$



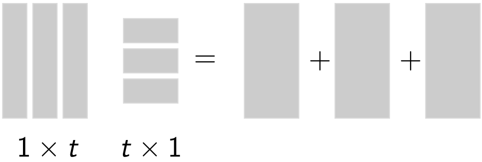
# Vektorokra particionálás: [sorvektorok] · [mátrix]




$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{a}_{1*} \\ \hline \mathbf{a}_{2*} \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{a}_{m*} \end{array}\right] \mathbf{B} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{a}_{1*}\mathbf{B} \\ \hline \mathbf{a}_{2*}\mathbf{B} \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{a}_{m*}\mathbf{B} \end{array}\right]$$



# Vektorokra particionálás: [oszlopvektorok] · [sorvektorok]




$$\mathbf{AB} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{a}_{*1} & \dots & \mathbf{a}_{*t} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{b}_{1*} \\ \hline \mathbf{b}_{2*} \\ \hline \dots \\ \hline \mathbf{b}_{t*} \end{array}\right]. = \mathbf{a}_{*1}\mathbf{b}_{1*} + \mathbf{a}_{*2}\mathbf{b}_{2*} + \dots + \mathbf{a}_{*t}\mathbf{b}_{t*}.$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

# A szorzat oszlopai és sorai

Á Az **AB** mátrix minden oszlopa az **A** oszlopainak lineáris kombinációja, és minden sora a **B** sorainak lineáris kombinációja.

B Az **AB** mátrix *j*-edik oszlopa

$$(\mathbf{AB})_{*j} = \mathbf{Ab}_{*j} = \mathbf{a}_{*1} b_{1j} + \mathbf{a}_{*2} b_{2j} + \ldots + \mathbf{a}_{*t} b_{1t}$$

az *i*-edik sora pedig

$$(\mathbf{AB})_{i*} = \mathbf{a}_{i*}\mathbf{B} = a_{i1}\mathbf{b}_{1*} + a_{i2}\mathbf{b}_{2*} + \ldots + a_{it}\mathbf{b}_{t*},$$

K $\mathrm{r}(\mathbf{AB}) \leqslant \mathrm{r}(\mathbf{A})$ és $\mathrm{r}(\mathbf{AB}) \leqslant \mathrm{r}(\mathbf{A})$, így

$$\mathrm{r}(\mathbf{AB}) \leqslant \min\left(\mathrm{r}(\mathbf{A}), \mathrm{r}(\mathbf{B})\right).$$

B Az **AB** oszloptere az **A** oszlopterének altere, és **AB** sortere **B** sorterének altere.

# Az összeadás és a skalárral való szorzás tulajdonságai

- $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$,
- $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$,
- $c(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = c\mathbf{A} + c\mathbf{B}$, $(c + d)\mathbf{A} = c\mathbf{A} + d\mathbf{A}$.

# Mire vigyázzunk a mátrixszorzásnál?

- A mátrixszorzás nem kommutatív, azaz $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ nem áll fenn bármely két összeszorozható mátrixra.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{de} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Ha $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$, akkor az $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$ feltétel kevés ahhoz, hogy a $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ következtetésre jussunk.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{de} \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- Az $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$-ból nem következik, hogy $\mathbf{A}$ vagy $\mathbf{B}$ a nullmátrix.
- Nullosztónak nevezzük egy algebrai struktúra olyan nemzérus elemét, melyhez található olyan nemzérus elem, mellyel vett szorzata zérus. ($\mathbb{R}$-ben ilyen nincs, $\mathbb{Z}_m$-ben igen, ha $m$ összetett.)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

# A szorzás tulajdonságai

- $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$ csoportosíthatóság, asszociativitás
- $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$ disztributivitás
- $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$ disztributivitás
- $(c\mathbf{A})\mathbf{B} = c(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}(c\mathbf{B})$
- $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{O}_{n\times t} = \mathbf{O}_{m\times t}$ szorzás nullmátrixszal
- $\mathbf{I}_m\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{I}_n = \mathbf{A}_{m\times n}$ szorzás egységmátrixszal

# Az asszociativitás bizonyítása

- Ha az egyenlőség egyik oldalán kijelölt szorzások elvégezhetők, akkor a másik oldalon kijelöltek is. ($\mathbf{A}_{m\times s}$, $\mathbf{B}_{u\times v}$, $\mathbf{C}_{t\times n}$ mindkét esetben $\rightsquigarrow$ $s=u$, $v=t$)
- Elég sorvektor alakú **A** és oszlopvektor alakú **C** mátrixra bizonyítani, mert
$$((\mathbf{AB})\mathbf{C})_{ij}=(\mathbf{a}_{i*}\mathbf{B})\mathbf{c}_{*j},\quad (\mathbf{A}(\mathbf{BC}))_{ij}=\mathbf{a}_{i*}(\mathbf{B}\mathbf{c}_{*j}).$$
- $$\begin{bmatrix}\sum_{k=1}^{m}a_kb_{k1} & \sum_{k=1}^{m}a_kb_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{m}a_kb_{kn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{bmatrix}=\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}a_kb_{kl}c_l.$$
- $$\begin{bmatrix}a_1 & \dots & a_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sum_{l=1}^{n}b_{1l}c_l\\\vdots\\\sum_{k=1}^{n}b_{ml}c_l\end{bmatrix}=\sum_{k=1}^{m}a_k\left(\sum_{l=1}^{n}b_{kl}c_l\right)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}a_kb_{kl}c_l.$$

# Asszociativitás következményei

- Több mátrix szorzatát nem kell zárójelezni.
- Ha $\mathbf{D} = \mathbf{ABC}$, akkor

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{ik} b_{kl} c_{lj}.$$

- A fizikusok által használt Einstein-konvenció: az indexelt változók szorzatainak összegében a szumma jelek feleslegesek, hisz azokra az indexekre kell összegezni, amelyek legalább kétszer szerepelnek, míg az egyszer szereplőkre nem:

$$d_{ij} = a_{ik} b_{kl} c_{lj}.$$

# Mátrix hatványozása

- $\mathbf{A}^1 := \mathbf{A}$ és $\mathbf{A}^{k+1} := \mathbf{A}^k\mathbf{A}$
- csak négyzetes mátrixok szorozhatók önmagukkal
- $\mathbf{A}^k\mathbf{A}^m = \mathbf{A}^{k+m}$
- $(\mathbf{A}^k)^m = \mathbf{A}^{km}$
- $\mathbf{A}^0 =?$
- precedencia-elv:
$$\mathbf{A}^k\mathbf{A}^0 = \mathbf{A}^{k+0} = \mathbf{A}^k.$$
- $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}_n$

# Hatvány kiszámítása

P $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$, $\mathbf{A}^n=?$

M $\mathbf{A}^2=\mathbf{I}\rightsquigarrow\mathbf{A}^{2k}=\mathbf{I}_2$ és $\mathbf{A}^{2k+1}=\mathbf{A}$.

P $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&a\\0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$, $\lim\limits_{k\to\infty}\mathbf{B}^k=?$

M $\mathbf{B}^k=\begin{bmatrix}\frac{1}{2^k}&\frac{k}{2^{k-1}}a\\0&\frac{1}{2^k}\end{bmatrix}$ (teljes indukcióval!) $\rightsquigarrow\lim\limits_{k\to\infty}\mathbf{B}^k=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=\mathbf{O}$.

P Legyen $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1&2&-3\\2&3&-4\\3&4&-6\end{bmatrix}$. Mennyi $p(\mathbf{C})$, ha $p(x)=x^3+2x^2-1$?

M $p(\mathbf{C})=\mathbf{C}^3+2\mathbf{C}^2-\mathbf{I}=$

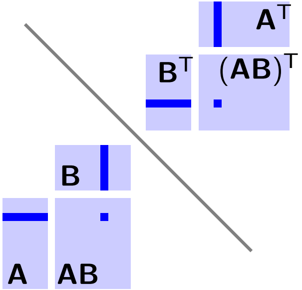
$$\begin{bmatrix}9&8&-14\\8&7&-12\\14&12&-21\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}-4&-4&7\\-4&-3&6\\-7&-6&11\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

# A transzponálás tulajdonságai

- $(\mathbf{A}^\mathsf{T})^\mathsf{T} = \mathbf{A}$,
- $(\mathbf{A} + \mathbf{C})^\mathsf{T} = \mathbf{A}^\mathsf{T} + \mathbf{C}^\mathsf{T}$,
- $(c\mathbf{A})^\mathsf{T} = c\mathbf{A}^\mathsf{T}$,
- $(\mathbf{AB})^\mathsf{T} = \mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}$,

  $\left((\mathbf{AB})^\mathsf{T}\right)_{ij} = (\mathbf{AB})_{ji} = (\mathbf{A})_{j*}(\mathbf{B})_{*i}$.

  $\left(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)_{ij} = \left(\mathbf{B}^\mathsf{T}\right)_{i*}\left(\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)_{*j} \overset{*}{=} (\mathbf{A})_{j*}(\mathbf{B})_{*i}$.



# Mátrixszorzás inverze – mátrixok osztása

- A mátrixszorzás nem kommutatív ezért az $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ és az $\mathbf{YA} = \mathbf{B}$ egyenletek megoldása különböző is lehet.
- Be lehet vezetni egy balról és egy jobbról való osztást:

$$\mathbf{YA} = \mathbf{B} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{Y} = \mathbf{B}/\mathbf{A} \qquad \mathbf{B} \text{ jobbról osztva } \mathbf{A}\text{-val}$$

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{X} = \mathbf{A}\backslash\mathbf{B} \qquad \mathbf{B} \text{ balról osztva } \mathbf{A}\text{-val}$$

- Például

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Big\backslash \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{mert} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{és}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Big/ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{mert} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

# Mátrix inverzének definíciója

- Legyen $\mathbf{A}$ egy $n \times n$-es mátrix. Azt mondjuk, hogy **A invertálható**, ha létezik olyan $\mathbf{B}$ mátrix, melyre

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n.$$

  A $\mathbf{B}$ mátrixot **A inverzének** nevezzük, és $\mathbf{A}^{-1}$-nel jelöljük. A nem invertálható mátrixot **szingulárisnak** nevezzük.
- Ha $\mathbf{A}$ inverze $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}$ inverze $\mathbf{A}$.
- $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$
- Egy mátrixnak egy inverze lehet. Tfh $\mathbf{A}$ inverze $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C} = \mathbf{CI} = \mathbf{C}(\mathbf{AB}) = (\mathbf{CA})\mathbf{B} = \mathbf{IB} = \mathbf{B}$$

- $\mathbf{A}^{-1}$, precedenciaelv: $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}^{-1+1} = \mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$

# Példa mátrix inverzére

- Amh az $\mathbf{A}$ mátrix **nilpotens**, ha van olyan $k$ pozitív egész, hogy $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$.
- $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- Ha $\mathbf{A}$ nilpotens, és $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$, akkor $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ invertálható, és inverze $\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \ldots + \mathbf{A}^{k-1}$.
- $$\begin{aligned} (\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \ldots + \mathbf{A}^{k-1}) \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \ldots + \mathbf{A}^{k-1} - \mathbf{A} - \mathbf{A}^2 - \ldots - \mathbf{A}^{k-1} - \mathbf{A}^k \\ &= \mathbf{I} - \mathbf{A}^k \\ &= \mathbf{I} \end{aligned}$$

# Elemi mátrixok inverze

| elemi mátrix | sorművelet | inverz sorművelet | inverz mátrix |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{E}_{ij}$ | $S_i \leftrightarrow S_j$ | $S_i \leftrightarrow S_j$ | $\mathbf{E}_{ij}^{-1} = \mathbf{E}_{ij}$ |
| $\mathbf{E}_i(c)$ | $cS_i$ | $\frac{1}{c}S_i$ | $\mathbf{E}_i(c)^{-1} = \mathbf{E}_i(\frac{1}{c})$ |
| $\mathbf{E}_{ij}(c)$ | $S_i + cS_j$ | $S_i - cS_j$ | $\mathbf{E}_{ij}(c)^{-1} = \mathbf{E}_{ij}(-c)$ |

# Az inverz létezése

**Tétel (Az inverz létezéséhez elég egy feltétel)**

*A négyzetes* $\mathbf{A}$ *mátrix pontosan akkor invertálható, ha létezik olyan* $\mathbf{B}$ *mátrix, hogy az* $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ *és a* $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$ *feltételek egyike teljesül. Ha ilyen* $\mathbf{B}$ *mátrix létezik, az egyértelmű.*

- $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ mátrixegyenlet megoldása: $\mathbf{rref}[\mathbf{A}|\mathbf{I}] = [\mathbf{I}|\mathbf{B}] \rightsquigarrow \mathbf{AB} = \mathbf{I}$.
- $\mathbf{BY} = \mathbf{I}$ mátrixegyenlet megoldása: $\mathbf{rref}[\mathbf{B}|\mathbf{I}] = [\mathbf{I}|\mathbf{A}]$???
- $[\mathbf{A}|\mathbf{I}] \Longrightarrow [\mathbf{I}|\mathbf{B}]$
- Az inverz lépéseket alkalmazva $[\mathbf{I}|\mathbf{B}] \Longrightarrow [\mathbf{A}|\mathbf{I}]$
- A két blokkot felcserélve: $[\mathbf{B}|\mathbf{I}] \Longrightarrow [\mathbf{I}|\mathbf{A}]$

# Inverz kiszámítása

## Állítás (Inverz kiszámítása elemi sorműveletekkel)

*A négyzetes* **A** *mátrix invertálható, ha az* $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$ *mátrix elemi sorműveletekkel* $[\mathbf{I}|\mathbf{B}]$ *alakra hozható, ekkor* **A** *inverze* **B**. *Ha* **A** *redukált lépcsős alakja nem az* **I** *mátrix, akkor* **A** *nem invertálható.*

- $$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 6\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\ 0 & 3 & -2\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}, \text{ mert}$$
  $$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -3 & -3 & 0 & 1\end{array}\right] \Rightarrow$$
  $$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1\end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1\end{array}\right]$$

# $2 \times 2$-es mátrix inverze

- Az $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ mátrix pontosan akkor invertálható, ha $ad - bc \neq 0$, és ekkor
$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$
- mátrixszorzással ellenőrizzük
- a feltétel elégségességét a képlet igazolja
- szükségesség: $ad - bc = 0$, azaz $ad = bc \iff \mathbf{A}$ egyik sora a másik skalárszorosa
- ekkor $\mathbf{A}$ nem alakítható elemi sorműveletekkel egységmátrixszá.

# Az inverz alaptulajdonságai

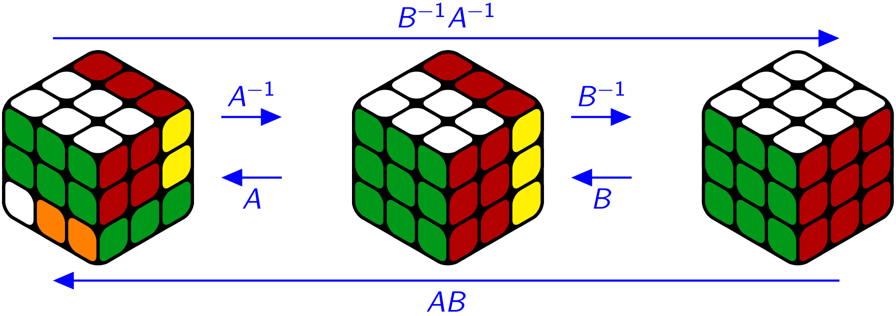
- $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ egyaránt $n \times n$-es invertálható mátrixok
  - *a)* $\mathbf{A}^{-1}$ invertálható, és inverze $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}$,
  - *b)* $c\mathbf{A}$ invertálható, és inverze $\frac{1}{c}\mathbf{A}^{-1}$,
  - *c)* $\mathbf{AB}$ invertálható, és inverze $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$,
  - *d)* $\mathbf{A}^k$ invertálható, és inverze $\left(\mathbf{A}^k\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^k$, definíció szerint ezt értjük $\mathbf{A}^{-k}$-n,
  - *e)* $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ invertálható, és $\left(\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^\mathsf{T}$.
- *c)* Az

$$(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}(\mathbf{BB}^{-1})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$$

szorzat bizonyítja, hogy $\mathbf{AB}$ invertálható, és inverze $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

- *d)* Az $\left(\mathbf{A}^k\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^k$ egyenlőség igaz volta a

$$\underbrace{\mathbf{AA}\ldots\mathbf{A}}_{k \text{ tényező}}\underbrace{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\ldots\mathbf{A}^{-1}}_{k \text{ tényező}} = \underbrace{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\ldots\mathbf{A}^{-1}}_{k \text{ tényező}}\underbrace{\mathbf{AA}\ldots\mathbf{A}}_{k \text{ tényező}} = \mathbf{I}$$



$B^{-1}A^{-1}$
$A^{-1}$
$A$
$B^{-1}$
$B$
$AB$

# Invertálhatóság és az egyenletrendszerek megoldhatósága

## Tétel (Az invertálhatóság és az egyenletrendszerek)

*Adva van egy $n \times n$-es* $\mathbf{A}$ *mátrix. Az alábbi állítások ekvivalensek:*

1. $\mathbf{A}$ *invertálható;*
2. *az* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ *mátrixegyenlet bármely $n \times t$-es* $\mathbf{B}$ *mátrixra egyértelműen megoldható;*
3. *az* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *egyenletrendszer bármely $n$ dimenziós* $\mathbf{b}$ *vektorra egyértelműen megoldható;*
4. *a homogén lineáris* $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ *egyenletrendszernek a triviális* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *az egyetlen megoldása;*
5. $\mathbf{A}$ *redukált lépcsős alakja* $\mathbf{I}$*;*
6. $\mathbf{A}$ *előáll elemi mátrixok szorzataként.*

- Oldjuk meg a következő egyenletrendszert mátrixinvertálással!

$$\begin{aligned} 2x + \phantom{3}y &= 2 \\ 5x + 3y &= 3 \end{aligned}$$

- Az együtthatómátrix és inverze

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix},$$

így az ismeretlenek $(x, y)$ vektorára

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

# Mátrixegyenlet megoldása mátrixinvertálással

- Oldjuk meg az $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ mátrixegyenletet, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{és} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Az $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ mátrixegyenlet megoldása:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 5 \\ 3 & -9 & -8 \end{bmatrix}.$$

- Minden $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ alakú mátrixegyenlet invertálható $\mathbf{A}$ esetén megoldható szimultán egyenletrendszerként az $[\mathbf{A}|\mathbf{B}]$ mátrix redukált lépcsős alakra hozásával. Tehát így számolható minden $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ szorzat:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 2 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 4 & 3 & 1 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & -1 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -9 & -8 \end{array}\right]$$

# Mátrix elemi mátrixok szorzatára bontása

- Ha **A**-t elemi sorműveletek **I**-be transzformálják, akkor a sorműveletek inverzei fordított sorrendben elvégezve **I**-t **A**-ba viszik.

| Elemi sorműveletek | | Elemi mátrixok | Elemi mátrixok inverzei |
|---|---|---|---|
| $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ | | | |
| $\Downarrow$ | $S_2 - 3S_1$ | $\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ | $\mathbf{E}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ |
| $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ | | | |
| $\Downarrow$ | $-S_2$ | $\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ | $\mathbf{E}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ |
| $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ | | | |
| $\Downarrow$ | $S_1 - 2S_2$ | $\mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ | $\mathbf{E}_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ |
| $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ | | | |

$$\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \mathbf{I} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Invertálhatóság és bázis

## Következmény (Invertálhatóság)

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Az alábbiak ekvivalensek:*

1. $\mathbf{A}$ *invertálható;*
2. $\mathbf{A}$ *oszlopvektorai lineárisan függetlenek;*
3. $\mathbf{A}$ *oszlopvektorai bázist alkotnak* $\mathbb{R}^n$*-ben;*
4. $\mathbf{A}$ *sorvektorai lineárisan függetlenek;*
5. $\mathbf{A}$ *sorvektorai bázist alkotnak* $\mathbb{R}^n$*-ben;*
6. $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = n$.

## Következmény (Szingularitás)

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Az alábbiak ekvivalensek:*

1. $\mathbf{A}$ *szinguláris;*
2. $\mathbf{A}$ *oszlopvektorai lineárisan összefüggők;*
3. $\dim(\mathcal{O}(\mathbf{A})) < n$*;*
4. $\mathbf{A}$ *sorvektorai lineárisan összefüggők;*
5. $\dim(\mathcal{S}(\mathbf{A})) < n$*;*
6. $\mathbf{A}$ *bármely lépcsős alakjának van zérus sora, így* $\mathrm{r}(\mathbf{A}) < n$.

# Báziscsere

- $\mathcal{B}$ és $\mathcal{C}$ az $\mathbf{R}^n$ két bázisa. Legyen $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges. Ekkor

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = \mathbf{X}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}, \quad \text{és} \quad [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{Y}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}.$$

- A második egyenletbe helyettesítve az elsőt kapjuk, hogy

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{Y}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}\mathbf{X}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}},$$

  azaz $\mathbf{Y}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}\mathbf{X}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ minden vektort önmagába visz, tehát egyenlő az egységmátrixszal.
- $\mathbf{Y}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}\mathbf{X}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathbf{I}$, azaz e mátrixok egymás inverzei.

# Báziscsere

P $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$, $\mathcal{C} = \{(1,2,3),(0,1,2),(0,0,1)\}$, $\mathbf{X}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = ?$

1M A bázisokból leolvasható

$$\mathbf{B}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 1 & 0\\3 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

$\mathbf{D}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{E}} = \mathbf{C}^{-1}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}$, így $\mathbf{X}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathbf{D}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{E}}\mathbf{B}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$.

$$\mathbf{X}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 1 & 0\\3 & 2 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\-2 & -1 & -1\\1 & -1 & 0\end{bmatrix}.$$

# Báziscsere (folytatás)

2M $\mathbf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}\mathbf{X}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathbf{B}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$, ahol $\mathbf{X}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ az ismeretlen mátrix. megoldása a $[\mathbf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}|\mathbf{B}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}]$ redukált lépcsős alakjából:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

- Tehát

$$\mathbf{X}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

# Diagonális mátrixok

## Tétel (Műveletek diagonális mátrixokkal)

*Legyen* $\mathbf{A} = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\mathbf{B} = \operatorname{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n)$, *és legyen* $k$ *egész szám. Ekkor*

1. $\mathbf{AB} = \operatorname{diag}(a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n)$,
2. $\mathbf{A}^k = \operatorname{diag}(a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k)$, *speciálisan*
3. $\mathbf{A}^{-1} = \operatorname{diag}(a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_n^{-1})$.

# Permutáló mátrixok és kígyók

## Definíció (Permutáló mátrix, kígyó)

A diagonális mátrixok sorainak permutációjával kapott mátrixot **kígyónak** (más néven **transzverzálisnak**) nevezzük, speciálisan az egységmátrixból ugyanígy kapott mátrixot **permutáló mátrixnak** (más néven **permutációmátrixnak**) hívjuk.

- Az alábbi mátrixok mindegyike kígyó, az utolsó kettő egyúttal permutáló mátrix is:

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

# Műveletek permutáló mátrixokkal

Á Bármely két azonos méretű permutáló mátrix szorzata és egy permutáló mátrix bármely egész kitevős hatványa permutáló mátrix.

B $\mathbf{P}\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_j$, $\mathbf{e}_k^\mathsf{T}\mathbf{P} = \mathbf{e}_\ell^\mathsf{T}$ $\rightsquigarrow$ minden sorban és oszlopban pontosan egy 1-es.

Á Permutáló mátrix inverze megegyezik a transzponáltjával, azaz ha $\mathbf{P}$ permutáló mátrix, akkor

$$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^\mathsf{T}.$$

B $(\mathbf{P}\mathbf{P}^\mathsf{T})_{ii} = \mathbf{P}_{i*} \cdot \mathbf{P}_{i*} = 1$, míg

$$(\mathbf{P}\mathbf{P}^\mathsf{T})_{ij} = (\mathbf{P})_{i*}(\mathbf{P}^\mathsf{T})_{*j} = (\mathbf{P})_{i*} \cdot (\mathbf{P})_{j*} = 0.$$

P $$\mathbf{P}\mathbf{P}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

# Háromszögmátrixok

- D főátló alatt csak 0-elemek: felső háromszögmátrix
- D főátló felett csak 0-elemek: alsó háromszögmátrix
- D háromszögmátrix főátlójában csupa 1-es: egység háromszögmátrixról (unit triangular matrix)
- Á ha egy egyenletrendszer együtthatómátrixa háromszögmátrix, akkor behelyettesítésekkel megoldható (angolban backward/forward substitution)
- Á Felső háromszögmátrixok összege, szorzata, és invertálható felső háromszögmátrix inverze felső háromszögmátrix. Alsóra analóg.
- Á Egy háromszögmátrix pontosan akkor invertálható, ha főátlóbeli elemeinek egyike sem zérus.

# Szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixok

D szimmetrikus mátrix: $\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{A}$

D ferdén szimmetrikus mátrix: $\mathbf{A}^\mathsf{T} = -\mathbf{A}$

P $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 9 \\ -9 & 2 & 9 \\ -9 & -9 & 3 \end{bmatrix}.$

M **A** szimmetrikus, a **B** ferdén szimmetrikus, a **C** egyik sem.

Á Ferdén szimmetrikus mátrix főátlójában 0-k állnak.

Á Szimmetrikus mátrixok összege, skalárszorosa, inverze szimmetrikus. Ferdén szimmetrikus mátrixok összege, skalárszorosa, inverze ferdén szimmetrikus.

Á Szimmetrikus mátrixok szorzata szimmetrikus $\iff$ felcserélhetők.

B $(\mathbf{AB})^\mathsf{T} = \mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{BA} = \mathbf{AB}$.

$\mathbf{AB} = (\mathbf{AB})^\mathsf{T} = \mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{BA}$,

# Szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixokról 2

T **Felbontás szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrix összegére**
Minden négyzetes mátrix előáll egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus mátrix összegeként, nevezetesen minden $\mathbf{A}$ négyzetes mátrixra

$$\mathbf{A} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\right)}_{\text{szimmetrikus}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\right)}_{\text{ferdén szimm.}}.$$

B $\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\right)^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}} + \left(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\right)^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}} + \mathbf{A} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathsf{T}}$

$\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\right)^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}} - \left(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\right)^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}} - \mathbf{A} = -\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\right)$

T **$\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$ szimmetrikus** tetszőleges $\mathbf{A}$ mátrix esetén.

B $\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\right)^{\mathsf{T}} = \left(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\right)^{\mathsf{T}}\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$.

# Gyorsszorzás

- Strassen-formulák (1969): $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ és mindegyik $2 \times 2$-es mátrix, akkor a szorzás elvégezhető a következő formulákkal:

$$
\begin{aligned}
d_1 &= (a_{11} + a_{22})(b_{11} + b_{22}) & c_{11} &= d_1 + d_4 - d_5 + d_7 \\
d_2 &= (a_{21} + a_{22})b_{11} & c_{21} &= d_2 + d_4 \\
d_3 &= a_{11}(b_{12} - b_{22}) & c_{12} &= d_3 + d_5 \\
d_4 &= a_{22}(-b_{11} + b_{21}) & c_{22} &= d_1 + d_3 - d_2 + d_6 \\
d_5 &= (a_{11} + a_{12})b_{22} \\
d_6 &= (-a_{11} + a_{21})(b_{11} + b_{12}) \\
d_7 &= (a_{12} - a_{22})(b_{21} + b_{22})
\end{aligned}
$$

- A standard mátrixszorzás műveletigénye $2n^3 - n^2$ (ebből $n^3$ szorzás és $n^3 - n^2$ összeadás). A Strassen-formulákkal való szorzásé $n = 2^k$ esetén legföljebb $7 \cdot 7^k - 6 \cdot 4^k$. Ez $k = \lceil \log_2 n \rceil$ esetén $cn^{\log_2 7} \leq cn^{2.81}$ felső becslést ad (a ma ismert legjobb korlát $cn^{2.3728639}$)

- Ha egy $\mathbf{A}$ mátrixból el lehet jutni egy $\mathbf{U}$ felső háromszögalakhoz olyan sorműveletekkel, melyekben egy sor konstansszorosát valamely alatta lévő sorhoz adjuk, azaz

$$\mathbf{E}_k \dots \mathbf{E}_1 \mathbf{A} = \mathbf{U}. \tag{1}$$

- akkor $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ alakra hozható (lower, upper)

D Azt mondjuk, hogy az $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix egy $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ alakú tényezőkre bontása LU-felbontás (LU-faktorizáció, LU-dekompozíció), ha $\mathbf{L}$ alsó egység háromszögmátrix, $\mathbf{U}$ pedig felső háromszögmátrix.

- Nincs minden mátrixnak LU-felbontása, pl.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & c \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

- Az LU-felbontás nem egyértelmű, pl.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

felbontás minden $a$ paraméterértékre fönnáll.

# LU-felbontás kiszámítása

- Határozzuk meg **A** LU-felbontását!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xRightarrow{S_2 - 1/2 S_1} \qquad \left( \mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xRightarrow{S_3 - 1/4 S_1} \qquad \left( \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xRightarrow{S_3 - 1/2 S_2} \qquad \left( \mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{U}.$$

# LU-felbontás kiszámítása

- Tehát $\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \mathbf{U}$, amiből az $(\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1)^{-1} = \mathbf{E}_1^{-1}\mathbf{E}_2^{-1}\mathbf{E}_3^{-1}$ mátrixszal való beszorzás után $\mathbf{A} = (\mathbf{E}_1^{-1}\mathbf{E}_2^{-1}\mathbf{E}_3^{-1})\mathbf{U}$.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

## Algoritmus

*Algoritmus a Gauss-elimináció lépcsős alak helyett felső háromszögalakú mátrixot adó megváltoztatásával, ahol* $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m\times n}$ *($\mathbb{F}$ test):*

1. $\mathbf{L} \leftarrow \mathbf{I}_m$, $\mathbf{U} \leftarrow \mathbf{A}$, $t \leftarrow 1$
2. *ha* $u_{tt} = 0$ *és* $\exists k > t : u_{kt} \neq 0$, *akkor „nincs LU-felbontás” STOP*
3. $u_{kt} \neq 0$ *eliminálása* $k > t$*-re az* $S_k - l_{kt}S_t$ *sorművelettel;* $(\mathbf{L})_{kt} \leftarrow l_{kt}$
4. $t \leftarrow t + 1$
5. *ha* $t = n$, *akkor „az LU-felbontás:* $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$*” STOP*
6. *menj 2-re*

## Tétel (Az LU-felbontás létezése és egyértelműsége)

*A fenti algoritmusra igaz, hogy*

(a) *pontosan akkor áll le hibaüzenettel, ha* **A***-nak nincs LU-felbontása,*

(b) *a megkonstruált* **L** *és* **U** *mátrixok LU-felbontást adnak,*

(c) *ha* **A** *invertálható, akkor e felbontás egyértelmű.*

# Az algoritmus LU-felbontást ad

- Jelölje az $S_j - l_{ji} S_i$ sorművelet elemi mátrixát $\mathbf{E}_{ji}$ $(1 \le i < j \le m)$.
- Legyen

$$\mathbf{E} = (\mathbf{E}_{m-1,m})(\mathbf{E}_{m-2,m}\mathbf{E}_{m-2,m-1}) \dots (\mathbf{E}_{m2} \dots \mathbf{E}_{42}\mathbf{E}_{32})(\mathbf{E}_{m1} \dots \mathbf{E}_{31}\mathbf{E}_{21}).$$

- Az algoritmus szerint ekkor $\mathbf{EA} = \mathbf{U}$.
- $\mathbf{EL} =?$
- $\mathbf{L}$ főátlójában csupa 1, $ji$-edik helyén $l_{ji}$ áll, ezért az elemi $\mathbf{E}_{ji}$ mátrix épp ezt az elemet fogja eliminálni, és így $\mathbf{E}$ minden főátló alatti elemet eliminál, azaz $\mathbf{EL} = \mathbf{I}$.
- Eszerint $\mathbf{E}^{-1} = \mathbf{L}$, tehát $\mathbf{A} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{U} = \mathbf{LU}$.

# Egyenletrendszer megoldása LU-felbontással

- $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ megoldható $\iff$ $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$, $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ megoldható.
- E két egyenletrendszer visszahelyettesítésekkel megoldható.
- Oldjuk meg: $$\begin{aligned} 4x_1 + 8x_2 + 8x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 4 \end{aligned}$$
- $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$: $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$
- $\mathbf{y} = (8, 0, 2)$
- $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$: $$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$
- $\mathbf{x} = (0, 0, 1)$.

# Mátrix invertálása LU-felbontással

- $\mathbf{AX} = \mathbf{I} \iff \mathbf{LY} = \mathbf{I},\ \mathbf{UX} = \mathbf{Y}.$
- Invertáljuk a $\begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ mátrixot!
- $\mathbf{LY} = \mathbf{I}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{UX} = \mathbf{Y}$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 3/4 & -1/2 & -1 \\ -1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

# Az LU-felbontás a gyakorlatban

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ & 1 & 0\\ & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 2 & 4 & 1\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}4.00 & 1.00 & 2.00\\ 2.00 & 4.00 & 1.00\\ 1.00 & 2.00 & 4.00\end{bmatrix}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \mathbf{1/2} & 1 & 0\\ & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 0 & 7/2 & 0\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}4.00 & 1.00 & 2.00\\ 0.50 & 3.50 & 0.00\\ 1.00 & 2.00 & 4.00\end{bmatrix}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \mathbf{1/2} & 1 & 0\\ \mathbf{1/4} & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 0 & 7/2 & 0\\ 0 & 7/4 & 7/2\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}4.00 & 1.00 & 2.00\\ 0.50 & 3.50 & 0.00\\ 0.25 & 1.75 & 3.50\end{bmatrix}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \mathbf{1/2} & 1 & 0\\ \mathbf{1/4} & \mathbf{1/2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 0 & 7/2 & 0\\ 0 & 0 & 7/2\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}4.00 & 1.00 & 2.00\\ 0.50 & 3.50 & 0.00\\ 0.25 & 0.50 & 3.50\end{bmatrix}$$

# Mire jó?

- Az LU-felbontás műveletigénye megegyezik a Gauss-kiküszöbölésével, azaz egy $n$-edrendű mátrixra nagyságrendileg $2n^3/3$.
- Egyenletrendszer együtthatómátrixának LU-felbontásához nincs szükség az egyenletrendszer jobb oldalára (ezért pl. használható akkor is, ha az még nem ismeretes, vagy több van belőle).
- Az LU-felbontás ismeretében több mátrixokkal kapcsolatos számítás gyorsabban elvégezhető (inverz, determináns,...).
- Az LU-felbontás memóriatakarékos, és vannak olyan speciális mátrixosztályok (pl. szalagmátrixok, ritka mátrixok), melyekre létezik a kiküszöbölésnél gyorsabb algoritmus az LU-felbontásra.
- A komputer algebra programok ha egy mátrixon valamilyen számítást kell végeznek, ami megoldható az LU-felbontással, akkor azzal oldják meg. Így ha később egy másik számítást is el kell e mátrixszal végezni, e felbontás ismeretében az már sokkal gyorsabb lehet.

# PLU-felbontás

- Egy **P** permutáló mátrixszal való balról szorzással minden mátrix olyan alakra hozható, melynek van LU-felbontása:

$$\mathbf{PA} = \mathbf{LU}, \text{ azaz } \mathbf{A} = \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{LU}.$$

- Egy tetszőleges $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$ mátrixnak egy permutáló, egy egység főátlójú négyzetes alsó háromszög- és egy $m \times n$-es felső háromszögmátrix szorzatára való bontását PLU-felbontásnak nevezzük.

# PLU-felbontás

- Ha $m > n$, akkor $\mathbf{U}$ utolsó $m-n$ sora zérussor, ezért ezeket, és $\mathbf{L}$ utolsó $m-n$ oszlopa is elhagyható, vagyis ha $r = \min(m,n)$, akkor $\mathbf{P}$ $m \times m$-es permutáló mátrix, $\mathbf{L}$ 1-esekből álló főátlójú $m \times r$-es alsó, míg az $\mathbf{U}$ $r \times n$-es felső háromszögmátrix.
- Például:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 1 & -7 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & -7 & 5 \\ 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 3 & -6 & 8 & 6 & -8 \end{bmatrix} \tag{2}$$

mátrix PLU-felbontását úgy, hogy minden lépésben részleges főelemkiválasztással a főátlóbeli elem alatti legnagyobb abszolút

$$\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array}\begin{bmatrix}-1 & 6 & 1 & -7 & 4\\ 1 & 4 & 4 & -7 & 5\\ 4 & -8 & 4 & 8 & -4\\ 3 & -6 & 8 & 6 & -8\end{bmatrix} \to \begin{array}{c}3\\2\\1\\4\end{array}\begin{bmatrix}4 & -8 & 4 & 8 & -4\\ 1 & 4 & 4 & -7 & 5\\ -1 & 6 & 1 & -7 & 4\\ 3 & -6 & 8 & 6 & -8\end{bmatrix} \to$$

$$\begin{array}{c}\\3\\2\\1\\4\end{array}\begin{bmatrix}4 & -8 & 4 & 8 & -4\\ 1/4 & 6 & 3 & -9 & 6\\ -1/4 & 4 & 2 & -5 & 3\\ 3/4 & 0 & 5 & 0 & -5\end{bmatrix} \to \begin{array}{c}\\3\\2\\1\\4\end{array}\begin{bmatrix}4 & -8 & 4 & 8 & -4\\ 1/4 & 6 & 3 & -9 & 6\\ -1/4 & 2/3 & 0 & 1 & -1\\ 3/4 & 0 & 5 & 0 & -5\end{bmatrix} \to$$

$$\begin{array}{c}\\3\\2\\4\\1\end{array}\begin{bmatrix}4 & -8 & 4 & 8 & -4\\ 1/4 & 6 & 3 & -9 & 6\\ 3/4 & 0 & 5 & 0 & -5\\ -1/4 & 2/3 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix} \to \begin{array}{c}\\3\\2\\4\\1\end{array}\begin{bmatrix}4 & -8 & 4 & 8 & -4\\ 1/4 & 6 & 3 & -9 & 6\\ 3/4 & 0 & 5 & 0 & -5\\ -1/4 & 2/3 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 6 & 1 & -7 & 4\\ 1 & 4 & 4 & -7 & 5\\ 4 & -8 & 4 & 8 & -4\\ 3 & -6 & 8 & 6 & -8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1/4 & 1 & 0 & 0\\ 3/4 & 0 & 1 & 0\\ -1/4 & 2/3 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -8 & 4 & 8 & -4\\ 0 & 6 & 3 & -9 & 6\\ 0 & 0 & 5 & 0 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix}-1 & 6 & 1 & -7 & 4\\ 1 & 4 & 4 & -7 & 5\\ 4 & -8 & 4 & 8 & -4\\ 3 & -6 & 8 & 6 & -8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1/4 & 1 & 0 & 0\\ 3/4 & 0 & 1 & 0\\ -1/4 & 2/3 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -8 & 4 & 8 & -4\\ 0 & 6 & 3 & -9 & 6\\ 0 & 0 & 5 & 0 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}.$$