Bevezetés az algebrába – A megoldások tere

Wettl Ferenc
Algebra Tanszék

BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

2015. december 6.

Mátrix rangja

Következmény (Főelemek oszlopai)

Egy test fölötti mátrix bármely lépcsős alakjában a főelemek ugyanazokban az oszlopokban vannak, tehát ezek száma is független a lépcsős alaktól.

Következmény

$$\boxed{\begin{array}{c}\textit{bármely lépcsős}\\ \textit{alak főelemeinek}\\ \textit{száma}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\textit{bármely lépcsős}\\ \textit{alak nemzérus}\\ \textit{sorainak száma}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\textit{a redukált lépcsős}\\ \textit{alak vezéregye-}\\ \textit{seinek száma.}\end{array}}$$

Definíció (Mátrix rangja)

Egy mátrix valamely lépcsős alakjában a nemnulla sorok számát a mátrix **rangjának** nevezzük. Az $\mathbf{A}$ rangját $\mathrm{r}(\mathbf{A})$ ($rang(\mathbf{A})$ vagy $rank(\mathbf{A})$) jelöli.

Rang kiszámítása

P Számítsuk ki az alábbi mátrixok rangját!

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- 1, 2, 4, 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kötött és szabad változók

Állítás (Kötött és szabad változók száma)

Ha az n-ismeretlenes $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ *egyenletrendszer megoldható, és* $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = r$*, akkor a Gauss- vagy a Gauss–Jordan-módszerrel kapott megoldásában a kötött változók száma* r*, a szabad változóké* $n - r$*.*

- $$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
- Itt 3 a kötött és 4 a szabad változók száma.

Egyenletrendszer megoldhatóságának feltétele

Tétel (A megoldhatóság mátrixrangos feltétele)

Legyen $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ *egy n-ismeretlenes lineáris egyenletrendszer.*

1. *Ez* ***pontosan akkor oldható meg****, ha*

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}).$$

2. *Ez az egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg* ***egyértelműen****, ha*

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n.$$

A megoldások száma

- Valós együtthatós inhomogén és homogén lineáris egyenletrendszerek:

Feltétel	Megoldások száma
$\mathrm{r}(\mathbf{A}) < \mathrm{r}(\mathbf{A}\vert\mathbf{b})$	0
$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}\vert\mathbf{b}) = n$	1
$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}\vert\mathbf{b}) < n$	∞

Feltétel	Megoldások száma
$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = n$	1
$\mathrm{r}(\mathbf{A}) < n$	∞

Tétel (Homogén lineáris egyenletrendszer megoldhatósága)

*Az $[\mathbf{A}|\mathbf{0}]$ homogén lineáris egyenletrendszer mindig megoldható ($\mathbf{0}$-vektor, a **triviális megoldás**). Pontosan akkor van **nemtriviális** megoldása is, ha*

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}) < n,$$

ahol n az ismeretlenek – azaz $\mathbf{A}$ oszlopainak – számát jelöli. Ha m egyenletből áll és $m < n$, akkor van nemtriviális megoldás.

P Az a paraméter mely értékei mellett van az alábbi egyenletrendszernek 0, 1, illetve ∞ sok megoldása?

- $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & a^2 \end{array}\right] \xRightarrow[S_3-aS_1]{S_2-S_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-1 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & a^2-a \end{array}\right] \xRightarrow{S_3+S_2}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & -(a-1)(a+2) & (a+1)(a-1) \end{array}\right]$$
- $a=1$: a rang 1, az egyenletrendszer az $x_1+x_2+x_3=1$. Ennek megoldása: $(x_1,x_2,x_3)=(1-s-t,s,t)$, azaz
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
- $a=-2$: az együtthatómátrix rangja 2, a bővített mátrix rangja 3, az egyenletrendszer nem konzisztens!
- $a \neq 1$, $a \neq -2$: $x_1 = \dfrac{(a+1)^2}{a+2}$, $x_2 = \dfrac{1}{a+2}$, $x_3 = -\dfrac{a+1}{a+2}$.

1. Homogén és inhomogén egyenletrendszer megoldásai
   - Megoldhatóság és a megoldások száma
   - Homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak tere

2. Alterek tulajdonságai és az egyenletrendszerek
   - Bázis és dimenzió
   - A lineáris algebra alaptétele és a 4 kitüntetett altér

Homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai

Állítás (Megoldások lineáris kombinációja)

Egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak bármely lineáris kombinációja is megoldás.

- (Elég két megoldásra bizonyítani) Jelölje $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n$ az egyenletrendszer együtthatómátrixának oszlopvektorait. Legyen $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ és $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ két tetszőleges megoldás:

$$\mathbf{a}_1x_1 + \mathbf{a}_2x_2 + \ldots + \mathbf{a}_nx_n = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{a}_1y_1 + \mathbf{a}_2y_2 + \ldots + \mathbf{a}_ny_n = \mathbf{0},$$

- Legyen c, d két tetszőleges skalár. Biz., hogy $c\mathbf{x} + d\mathbf{y}$ is megoldás:

$$\mathbf{a}_1(cx_1 + dy_1) + \mathbf{a}_2(cx_2 + dy_2) + \ldots + \mathbf{a}_n(cx_n + dy_n) =$$
$$(c\mathbf{a}_1x_1 + d\mathbf{a}_1y_1) + (c\mathbf{a}_2x_2 + d\mathbf{a}_2y_2) + \ldots + (c\mathbf{a}_nx_n + d\mathbf{a}_ny_n) =$$
$$c(\mathbf{a}_1x_1 + \ldots + \mathbf{a}_nx_n) + d(\mathbf{a}_1y_1 + \ldots + \mathbf{a}_ny_n) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Valós vektortér

Egyelőre vektoron $\mathbb{R}^n$ elemeit értjük.

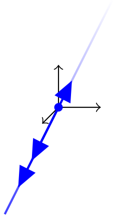
Definíció (Vektortér, altér)

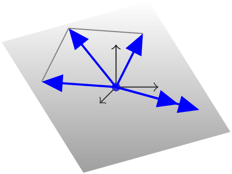
Vektortéren vektorok olyan nem üres $\mathcal{V}$ halmazát értjük, mely zárt a vektorösszeadás és a skalárral szorzás műveletére. Ha $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ két vektortér és $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$, akkor azt mondjuk, hogy az $\mathcal{U}$ vektortér a $\mathcal{V}$ vektortér **altere**. Jelölése: $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$.

- Az $\mathcal{A}$ vektorhalmaz pontosan akkor vektortér, ha az $\mathcal{A}$-beli vektorokból képzett lineáris kombinációk is mind $\mathcal{A}$-ban vannak.

Valós vektortér

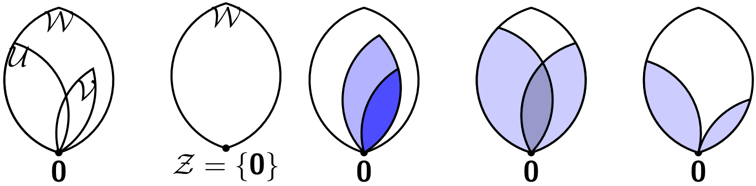
- Minden pozitív n egész esetén $\mathbb{R}^n$ vektortér.
- $\mathbb{R}^2$-ben egy origón átmenő egyenes vektorai (az egyenes pontjaiba mutató helyvektorok) alteret alkotnak.
- $\mathbb{R}^3$-ben bármely origón átmenő sík vagy egyenes vektorai alteret alkotnak.





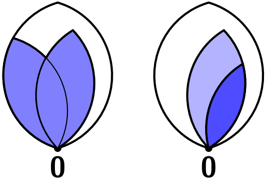
- Az $\mathbb{R}^3$ imént felsorolt alterei „olyanok”, mint az $\mathbb{R}$ és az $\mathbb{R}^2$. (Ezt precízen a vektortér absztrakt definíciója és a vektorterek izomorfizmusának fogalma fogja tisztázni. Akkor fogjuk igazolni, hogy $\mathbb{R}^n$ alterei valóban mind „olyanok”, mint $\mathbb{R}^k$, ahol $k \leqslant n$.)

Alterek tulajdonságai és szemléltetésük



- Minden altérnek eleme a nullvektor (bármely altérbeli vektor 0-szorosa is benne van).
- Minden altérbeli **x** vektorral együtt annak ellentettje (-1-szerese), a $-\mathbf{x}$ vektor is eleme az altérnek.
- Minden vektortér maga is altér (saját maga altere).
- $\mathcal{Z} = \{\mathbf{0}\}$ a **zérustér** altér. (NEM nulltér!).
- Altér altere altér, azaz ha $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$, és $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{U}$, akkor $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$.
- Alterek metszete altér: $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \mathcal{W}$.

Alterek tulajdonságai és szemléltetésük



- Két altér egyesítése csak akkor altér, ha egyik altere a másiknak.
- Alteret alkotnak-e az alábbi vektorhalmazok $\mathbb{R}^3$-ben?
  - $\{\,(x, y, z) \mid x = y,\ z = xy\,\}$,
  - $\{\,(s + 2t, s - 1, 2s + t) \mid s, t \in \mathbb{R}\,\}$,
  - $\{\,(x, y, z) \mid 2x - y + z = 0\,\}$,
  - $\{\,(x, y, z) \mid x = 2t,\ y = -t,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}\,\}$.
-
  - Nem. (Pl. $(1, 1, 1)$ benne van, $(2, 2, 2)$ nem.)
  - Nem. Nincs benne a nullvektor.
  - Igen. Az $\mathbf{n} = (2, -1, 1)$ normálvektorú sík. (Ha $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ a sík két vektora, azaz $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 0$ és $\mathbf{n} \cdot \mathbf{y} = 0$, akkor $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = 0$ és $\mathbf{n} \cdot (c\mathbf{x}) = 0$ is)
  - Igen. A $\mathbf{v} = (2, -1, 1)$ vektor skalárszorosai.

$\mathbb{R}^2$ és $\mathbb{R}^3$ alterei

- $\mathbb{R}^2$ alterei az alábbiak:
  - a zérusvektorból álló egyelemű halmaz, azaz a zérustér,
  - egy origón átmenő egyenes összes vektora,
  - a sík összes vektora.
- Hasonlóképp $\mathbb{R}^3$ alterei:
  - a zérusvektorból álló egyelemű halmaz,
  - egy origón átmenő egyenes összes vektora,
  - egy origón átmenő sík összes vektora,
  - a tér összes vektora.

Alterek tulajdonságai és szemléltetésük

Állítás (Megoldások altere)

Egy n-ismeretlenes ***homogén*** *lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza alteret alkot $\mathbb{R}^n$-ben.*

Definíció (Nulltér)

Az $\mathbf{A}$ együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak alterét az $\mathbf{A}$ mátrix **nullterének** nevezzük és $\mathcal{N}(\mathbf{A})$-val jelöljük.

- Határozzuk meg a $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix nullterét:
- $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Kifeszített altér

Definíció (Kifeszített altér)

$\mathcal{V}$ vektortér, a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_k \in \mathcal{V}$ vektorok

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k$$

alakú lineáris kombinációinak halmazát a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,..., $\mathbf{v}_k$ vektorok által **kifeszített altérnek** nevezzük, és $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$-val jelöljük.

A „kifeszített altér” altér?

Állítás (A kifeszített altér altér)

A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathcal{V}$ *vektorok által kifeszített* $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$ *vektorhalmaz* $\mathcal{V}$ *egy altere.*

Bizonyítás.

Legyen $\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k$, és $\mathbf{v} = d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \ldots + d_k\mathbf{v}_k$ a $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$ két tetszőleges vektora, és legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós. Ekkor

$$x\mathbf{u} = (xc_1)\mathbf{v}_1 + (xc_2)\mathbf{v}_2 + \ldots + (xc_k)\mathbf{v}_k \in \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k),$$

és

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (c_1 + d_1)\mathbf{v}_1 + \ldots + (c_k + d_k)\mathbf{v}_k \in \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k).$$

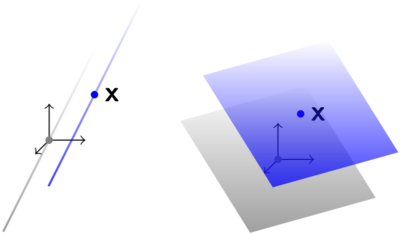
□

Az inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásai

Tétel (Homogén és inhomogén egyenletrendszer megoldásai)

Az inhomogén lineáris $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ *mátrixú egyenletrendszerre:*

$$\boxed{\begin{array}{c}\textit{inhomogén}\\ \textit{általános}\\ \textit{megoldása}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\textit{inhomogén egy}\\ \textit{partikuláris}\\ \textit{megoldása}\end{array}} + \boxed{\begin{array}{c}\textit{homogén}\\ \textit{általános}\\ \textit{megoldása}\end{array}}$$



Az inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásai

B Legyen $\mathbf{x}$ az inhomogén egyenletrendszer egy partikuláris megoldása, és jelölje $\mathcal{H}$ a homogén, $\mathcal{I}$ az inhomogén egyenletrendszer megoldáshalmazát.

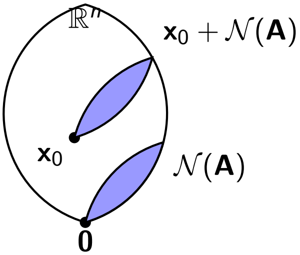
$\mathbf{x}+\mathcal{H}\subseteq\mathcal{I}$:

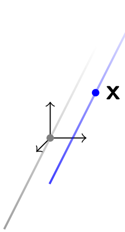
$$\begin{aligned}
&\mathbf{a}_{i*}\cdot\mathbf{x}=b_i,\\
&\mathbf{a}_{i*}\cdot\mathbf{y}=0, \qquad (i=1,2,\dots,m)\\
\rightsquigarrow\quad &\mathbf{a}_{i*}\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\mathbf{a}_{i*}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{a}_{i*}\cdot\mathbf{y}=b_i+0=b_i\\
\rightsquigarrow\quad &\mathbf{x}+\mathbf{y}\in\mathcal{I}
\end{aligned}$$

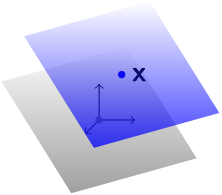
$\mathbf{x}+\mathcal{H}\supseteq\mathcal{I}$: Meg kell mutatnunk, hogy $\forall\mathbf{z}\in\mathcal{I}\ \exists\mathbf{y}\in\mathcal{H}$, hogy $\mathbf{z}=\mathbf{x}+\mathbf{y}$:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{a}_{i*}\cdot(\mathbf{z}-\mathbf{x})=\mathbf{a}_{i*}\cdot\mathbf{z}-\mathbf{a}_{i*}\cdot\mathbf{x}=b_i-b_i=0 \quad \forall i=1,2,\dots,m\\
\rightsquigarrow\quad &\mathbf{z}-\mathbf{x}\in\mathcal{H}
\end{aligned}$$

D Az inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak halmaza egy **altér eltoltja**, melyet geometriai nyelven **affin altereknek** nevezünk.







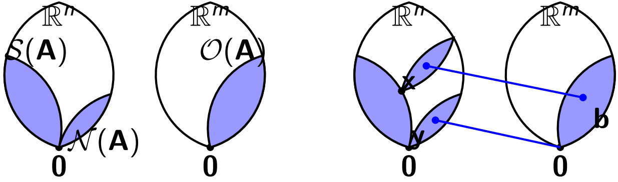
- Az inhomogén egyenletrendszer összes megoldása a homogén összes megoldásának – azaz $\mathcal{N}(\mathbf{A})$-nak – az inhomogén valamelyik megoldásával való eltoltja. Mindegy melyik megoldást választjuk!

Sortér, oszloptér

Definíció (Sortér, oszloptér)

Egy mátrix oszlopvektorai által kifeszített alteret **oszloptérnek**, a sorvektorai által kifeszített alteret **sortérnek** nevezzük.

- Az $m \times n$-es valós $\mathbf{A}$ mátrix sortere $\mathbb{R}^n$ altere, oszloptere $\mathbb{R}^m$ altere.
- Az $\mathbf{A}$ sorterét $\mathcal{S}(\mathbf{A})$, oszlopterét $\mathcal{O}(\mathbf{A})$ jelöli.



Egyenletrendszer megoldhatósága

Következmény (Inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldhatósága)

Az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ *mátrixú egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha* **b** *előáll az* **A** *oszlopainak lineáris kombinációjaként, azaz* **b** *benne van az* **A** *oszlopterében. A lineáris kombináció együtthatói megegyeznek a megoldásvektor koordinátáival.*

P Határozzuk meg, hogy a $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 2, -2, 1)$ és $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1, 1)$ vektorok által kifeszített altérnek eleme-e az $\mathbf{u} = (-1, 2, -3, 6)$ vektor! Adjunk meg egy ezt bizonyító lineáris kombinációt! Mutassuk meg, hogy a $\mathbf{w} = (-1, 2, -3, 4)$ vektor nem eleme az altérnek!

- $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}\ (= \mathbf{w})$ megoldását keressük. A szimultán egyenletrendszer mátrixa $[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3 \mid \mathbf{u}\ \mathbf{w}]$.

$$\left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 6 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

amiből $(x_1, x_2, x_3) = (3, 2, -2)$, és $\mathbf{w}$ valóban nem áll elő lineáris kombinációként, mert a $\mathbf{w}$-t tartalmazó egyenletrendszer ellentmondásos.

Lineáris függetlenség eldöntése

K Tekintsük az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_k \end{bmatrix}$ mátrixot! Az alábbi állítások ekvivalensek:

- az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ vektorok lineárisan függetlenek;
- az $\mathbf{A}$ együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszernek a triviálison kívül nincs más megoldása;
- az $\mathbf{A}$ lépcsős alakjának minden oszlopában van főelem, azaz $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = k$.

P Mutassuk meg, hogy a 4-dimenziós $(1, 2, 3, 4)$, $(0, 1, 0, 1)$ és $(1, 1, 1, 0)$ vektorok lineárisan függetlenek.

M A vektorokból képzett mátrix és lépcsős alakja

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ami azt mutatja, hogy a homogén lineáris egyenletrendszernek csak egyetlen megoldása van, azaz az oszlopvektorok lineárisan függetlenek.

1. Homogén és inhomogén egyenletrendszer megoldásai
   - Megoldhatóság és a megoldások száma
   - Homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak tere

2. Alterek tulajdonságai és az egyenletrendszerek
   - Bázis és dimenzió
   - A lineáris algebra alaptétele és a 4 kitüntetett altér

Sor- és oszloptér

T Elemi sorműveletek közben a sortér nem változik, az oszlopvektorok pedig olyan vektorokba transzformálódnak, melyek megőrzik az eredeti lineáris kapcsolatokat.

B Elemi sorműveletek közben a sortér nem csökken, sorművelet inverze is sorművelet $\rightsquigarrow$ a sortér nem változik.

Az oszlopok közti lineáris kapcsolatok koordinátánként fönnállnak $\rightsquigarrow$ elemi sorműveletek közben nem változnak.

T Legyen $\mathbf{B}$ az $\mathbf{A}$ mátrix egy lépcsős alakja. Ekkor

- $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ sortere megegyezik,
- az $\mathbf{A}$ oszlopvektorai között lévő lineáris kapcsolatok azonosak a $\mathbf{B}$ ugyanolyan sorszámú oszlopai közti lineáris kapcsolatokkal,
- $\mathbf{B}$ nemzérus sorvektorai lineárisan függetlenek,
- a főelemek oszlopvektorai $\mathbf{A}$-ban és $\mathbf{B}$-ben is lineárisan függetlenek.

- Elemi sorműveletek közben az oszloptér változik!

Bázis

Definíció (Bázis)

A $\mathcal{V}$ vektortér **bázisán** olyan vektorrendszert értünk, mely

- lineárisan független és
- kifeszíti a $\mathcal{V}$ teret (azaz generátorrendszer).

Az $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)$,..., $\mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ vektorokból álló halmazt az $\mathbb{R}^n$ vektortér **standard bázisának** nevezzük.

- A zérustérnek nincs bázisa!
- A standard bázis $\mathbb{R}^n$ egy n-elemű bázisa.

Bázis ekvivalens definíciói

Állítás

Legyen $\mathcal{V}$ egy tetszőleges vektortér, és legyen $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\} \subseteq \mathcal{V}$ vektorok egy halmaza. A következő állítások ekvivalensek:

- *$\mathcal{B}$ lineárisan független vektorokból áll és kifeszíti az $\mathcal{V}$ vektorteret, azaz $\mathcal{B}$ a $\mathcal{V}$ egy bázisa ($\mathcal{B}$ független generátorrendszer);*
- *$\mathcal{B}$ minimális méretű halmaz, mely kifeszíti $\mathcal{V}$-t ($\mathcal{B}$ minimális generátorrendszer);*
- *$\mathcal{B}$ maximális méretű, független vektorokból álló halmaz $\mathcal{V}$-ben ($\mathcal{B}$ maximális független).*

- Elég belátnunk, hogy egy minimális méretű generátorrendszer független vektorokból áll, és hogy egy maximális méretű független rendszer generátor.

Példa (Altér bázisának meghatározása)

Határozzuk meg az $(1,1,0,-2)$, $(2,3,3,-2)$, $(1,2,3,0)$ és $(1,3,6,2)$ vektorok által kifeszített altér egy bázisát!

1M Sorvektorokból

$$\begin{bmatrix}1&1&0&-2\\2&3&3&-2\\1&2&3&0\\1&3&6&2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&-2\\0&1&3&2\\0&1&3&2\\0&2&6&4\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&-2\\0&1&3&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

- A bázis vektorai $(1,1,0,-2)$, $(0,1,3,2)$.

2M Oszlopvektorokból

$$\begin{bmatrix}1&2&1&1\\1&3&2&3\\0&3&3&6\\-2&-2&0&2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&2&1&1\\0&1&1&2\\0&3&3&6\\0&2&2&4\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&2&1&1\\0&1&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

A $(1,1,0,-2)$ és $(2,3,3,-2)$ vektorok bázist alkotnak.

Vektor felírása a bázisvektorok lineáris kombinációjaként

P Az $(1, 1, 0, -2)$, $(2, 3, 3, -2)$, $(1, 2, 3, 0)$ és $(1, 3, 6, 2)$ vektorok mindegyikét fejezzük ki az általuk kifeszített altér bázisvektorainak lineáris kombinációjaként!

M Oszlopvektorokkal, a redukált lécsős alakból:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A redukált lépcsős alakból látjuk, hogy például a harmadik oszlop a második és az első különbsége. Ezek alapján:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Vektor egy bázisra vonatkozó koordinátás alakja

- A redukált lépcsős alak nemzérus soraiból álló

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix azt mutatja, hogy az $\mathcal{B}$ bázisban e négy vektor koordinátái rendre

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \ \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

- A $\mathbf{v}$ vektor $\mathcal{B}$ bázisbeli koordinátás alakjára a $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ vagy a $(\mathbf{v})_{\mathcal{B}}$ alakot használjuk. Így írhatjuk azt is, hogy

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \text{ vagy egyszerűbben, hogy } [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Bázis-tétel

Tétel (Bázis-tétel)

Ha a $\mathcal{V}$ vektortérnek van véges sok vektorból álló bázisa, akkor bármely két bázisa azonos számú vektorból áll.

- Legyen a $\mathcal{V}$ vektortérnek

$$\mathcal{B} = \{\, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \,\}, \text{ és } \mathcal{C} = \{\, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_r \,\},$$

  két bázisa, ahol $k < r$.
- Mivel $\mathcal{B}$ bázis $\mathcal{V}$-ben, ezért a $\mathcal{C}$ bázis vektorai is kifejezhetők lineáris kombinációikként:

$$\mathbf{w}_i = a_{i1}\mathbf{v}_1 + a_{i2}\mathbf{v}_2 + \ldots + a_{ik}\mathbf{v}_k, \quad (i = 1, \ldots, r). \tag{1}$$

- A $\mathcal{C}$ bázis vektorai lineárisan függetlenek, ezért a

$$c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \ldots + c_r\mathbf{w}_r = \mathbf{0} \tag{2}$$

  egyenlőség csak a $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$ konstansokra áll fenn.

- Az (1) egyenlőségeit a (2) egyenletbe helyettesítve

$$c_1(a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{12}\mathbf{v}_2 + \ldots + a_{1k}\mathbf{v}_k) + c_2(a_{21}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + \ldots + a_{2k}\mathbf{v}_k) + \\ \ldots + c_r(a_{r1}\mathbf{v}_1 + a_{r2}\mathbf{v}_2 + \ldots + a_{rk}\mathbf{v}_k) = \mathbf{0},$$

aminek $\mathcal{B}$ vektorai szerinti rendezése után kapjuk, hogy

$$(a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + \ldots + a_{r1}c_r)\mathbf{v}_1 + (a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{r2}c_r)\mathbf{v}_2 + \\ \ldots + (a_{1k}c_1 + a_{2k}c_2 + \ldots + a_{rk}c_r)\mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

- Ez azt jelenti, hogy a homogén lineáris

$$\begin{aligned} a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + \ldots + a_{r1}c_r &= 0 \\ a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{r2}c_r &= 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{1k}c_1 + a_{2k}c_2 + \ldots + a_{rk}c_r &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek a $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$ az egyetlen megoldása.
- Ellentmondás: egyenletek száma $<$ ismeretlenek száma ($k < r$).
- Indirekt feltevésünk helytelen, tehát a két bázis azonos méretű.

Dimenzió és rang

Definíció (Dimenzió)

Ha a $\mathcal{V}$ vektortérnek van véges bázisa, akkor **dimenzióján** egy bázisának elemszámát értjük, és e számot $\dim \mathcal{V}$-vel jelöljük.

Állítás (Dimenzió = rang)

Egy mátrix rangja, sorterének dimenziója és oszlopterének dimenziója megegyezik. Ebből következőleg $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$.

- A mátrix rangja megegyezik a lépcsős alakjában lévő nemzérus sorainak számával. E sorok a sortér bázisát adják.
- Az oszloptérről láttuk, hogy a főelemeknek megfelelő oszlopok az eredeti mátrixban lineárisan függetlenek és kifeszítik az oszlopteret.
- $\mathbf{A}$ sortere megegyezik $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ oszlopterével.

D Egy $\mathbb{R}^n$-beli vektorokból álló vektorrendszer **rangján** a vektorokból képzett mátrix rangját, vagy ami ezzel egyenlő, az általuk kifeszített altér dimenzióját értjük.

P Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix sorterének és nullterének dimenzióját!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

M Az $\mathbf{A}$ redukált lépcsős alakja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A mátrix rangja 2, így sorterének dimenziója 2. A nulltér dimenziója megegyezik az egyenletrendszer megoldásterének dimenziójával, ami megegyezik a szabad változók számával, ez 3.

Mátrixok terei

- Az $\mathbb{R}^{m\times n}$, vagyis az $m \times n$-es mátrixok tekinthetők mn hosszú vektoroknak, vagyis $\mathbb{R}^{mn}$ elemeinek.

P Alteret alkotnak-e az $\mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixok terében a szimmetrikus mátrixok, és ha igen, adjuk meg egy bázisukat. Mennyi az altér dimenziója?

Szimmetrikus mátrxokhoz tartozó vektorok összege és skalárszorosa olyan vektort ad, melyhez szimmetrikus mátrix tartozik, tehát alteret alkotnak.

A főátlóban egy 1-es, egyebütt 0 alakúak, valamint a főátló alatt és fölött szimmetrikus helyzetben egy 1-es, egyebütt 0 alakú mátrixok kifeszítik ezt az alteret.

Tétel (Dimenziótétel)

Bármely $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix esetén a sortér dimenziójának és a nulltér dimenziójának összege n. Képlettel:

$$\dim(\mathcal{S}(\mathbf{A})) + \dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = n.$$

B A mátrix sorterének dimenziója megegyezik a mátrix rangjával, azaz az $[\mathbf{A}|\mathbf{0}]$ mátrixú egyenletrendszerben a kötött változók számával.

A redukált lépcsős alakból való származtatás következtében a nullteret kifeszítő minden megoldásvektorban az összes szabad változóhoz tartozó koordináta 0, azt az egyet kivéve, amelyikhez a vektor tartozik. Így viszont mindegyik vektor független a többitől, vagyis e vektorok függetlenek, és mivel kifeszítik a nullteret, számuk megadja a nulltér dimenzióját.

1. Homogén és inhomogén egyenletrendszer megoldásai
   - Megoldhatóság és a megoldások száma
   - Homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak tere
2. Alterek tulajdonságai és az egyenletrendszerek
   - Bázis és dimenzió
   - A lineáris algebra alaptétele és a 4 kitüntetett altér

Vektorokra merőleges altér

P Határozzuk meg az összes olyan vektort $\mathbb{R}^4$-ben, mely merőleges a $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 2)$ és $\mathbf{v}_2 = (-1, 2, -2, 1)$ vektorok mindegyikére!

M Olyan $\mathbf{x}$ vektort keresünk, melyre $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{x} = 0$ és $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{x} = 0$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

amiből $\mathbf{x} = (-s - 2t, (s - 3t)/2, s, t)$, azaz

$$\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A megoldás tehát két vektor által kifeszített altér összes vektora.

A sortér és a nulltér merőlegessége

Állítás (A sortér és a nulltér merőlegessége)

A valós $\mathbf{A}$ *mátrix sorterének bármely* $\mathbf{s}$ *vektora és nullterének tetszőleges* $\mathbf{x}$ *vektora merőleges egymásra, azaz* $\mathbf{s} \cdot \mathbf{x} = 0$*.*

B A sortér minden vektora az $\mathbf{A}$ sorvektorainak valamely $c_1, \dots, c_m$ skalárokkal vett lineáris kombinációja.

$$\begin{aligned}
\mathbf{s} \cdot \mathbf{x} &= (c_1\mathbf{a}_{1*} + c_2\mathbf{a}_{2*} + \dots + c_m\mathbf{a}_{m*}) \cdot \mathbf{x} \\
&= c_1\mathbf{a}_{1*} \cdot \mathbf{x} + c_2\mathbf{a}_{2*} \cdot \mathbf{x} + \dots + c_m\mathbf{a}_{m*} \cdot \mathbf{x} \\
&= c_1 0 + c_2 0 + \dots + c_m 0 = 0.
\end{aligned}$$

D Egy vektortér két altere **merőleges**, ha bárhogy választva egy vektort az egyik és egyet a másik altérből, azok merőlegesek egymásra.

D Az $\mathbb{R}^n$ egy $\mathcal{W}$ alterére merőleges vektorok alterét a $\mathcal{W}$ **merőleges kiegészítő alterének** (vagy $\mathcal{W}$ **merőlegesének**) nevezzük és $\mathcal{W}^\perp$-pel jelöljük (amit olvashatunk „W merőlegesének" vagy „W perp"-nek).

A lineáris algebra alaptétele

Tétel (A lineáris algebra alaptétele)

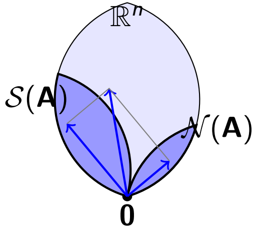
Minden valós mátrix sortere és nulltere merőleges kiegészítő alterei egymásnak.

Bizonyítás.

Láttuk, hogy a sortér merőleges kiegészítő altere a nulltér. Később bizonyítjuk, hogy bármely $\mathcal{V}$ altérre $(\mathcal{V}^\perp)^\perp = \mathcal{V}$. $\square$

Következmény

Ha $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{b\times n}$ *és* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, *akkor* $\mathbf{x}$ *egyértelműen áll elő egy* $\mathcal{S}(\mathbf{A})$*- és egy* $\mathcal{N}(\mathbf{A})$*-beli vektor összegeként.*



A négy kitüntetett altér

Tétel (A négy kitüntetett altér)

Tekintsük az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *mátrixot. Akkor a következő állítások teljesülnek:*

1. $\mathcal{S}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A})$, $\mathcal{O}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$.
2. $\mathbb{R}^n$ *minden vektora egyértelműen felbomlik egy* $\mathcal{S}(\mathbf{A})$*- és egy* $\mathcal{N}(\mathbf{A})$*-beli vektor összegére,*
3. $\mathbb{R}^m$ *minden vektora egyértelműen felbomlik egy* $\mathcal{O}(\mathbf{A})$*- és egy* $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$*-beli vektor összegére.*

A lineáris egyenletrendszer megoldásainak jellemzése

Tétel (Lineáris egyenletrendszer megoldásai)

Minden valós együtthatós megoldható (konzisztens) lineáris egyenletrendszerre igazak a következő állítások:

1. *egyetlen megoldása esik az együtthatómátrix sorterébe;*
2. *a sortérbe eső megoldás az összes megoldás közül a legkisebb abszolút értékű;*
3. *az összes megoldás előáll úgy, hogy a sortérbe eső megoldáshoz hozzáadjuk a homogén rész összes megoldását.*

B homogén lineáris egyenletrendszerekre semmitmondó, mert csak a nullvektor esik a sortérbe.

1 Tfh $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{S}(\mathbf{A})$ két megoldása az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ egyenletrendszernek. $\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = b_i$, így $\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x}_1 = b_i$ és $\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x}_2 = b_i$ $(i = 1, 2, \ldots m)$, így $\mathbf{a}_{i*} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = b_i - b_i = 0$, vagyis $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$, metszete a sortérrel a $\mathbf{0}$-vektor, azaz $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$, vagyis $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$.
Legyen az $\mathbf{x}$ mo. felbontása sortérbeli és nulltérbeli vektor összegére

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\mathcal{S}} + \mathbf{x}_{\mathcal{N}}.$$

E megoldásvektort beírva az i-edik egyenletbe kapjuk, hogy

$$b_i = \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{a}_{i*} \cdot (\mathbf{x}_{\mathcal{S}} + \mathbf{x}_{\mathcal{N}}) = \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x}_{\mathcal{S}} + \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x}_{\mathcal{S}}.$$

Eszerint bármely megoldás sortérbeli összetevője is megoldása az egyenletrendszernek!

3 Egyúttal beláttuk, hogy az összes megoldás e sortérbeli megoldás és a homogén egy megoldásának összege. Az előző egyenlőségekből az is kiolvasható, hogy az $\mathbf{x}_{\mathcal{S}}$ megoldáshoz bármely nulltérbeli vektort adva az egyenletrendszer egy megoldását kapjuk.

2 $\mathbf{x}_{\mathcal{S}} \perp \mathbf{x}_{\mathcal{N}}$, így a Pithagorász-tétel szerint

$$\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}_{\mathcal{S}}^2 + \mathbf{x}_{\mathcal{N}}^2 \geq \mathbf{x}_{\mathcal{S}}^2, \text{ azaz } |\mathbf{x}| \geq |\mathbf{x}_{\mathcal{S}}|.$$

A sortérbe eső megoldás meghatározása

P Oldjuk meg az $x + 4y + 8z + 12w = 450$ egyenletrendszert úgy, hogy a partikuláris megoldás minimális abszolút értékű legyen!

M A sorteret az $(1, 4, 8, 12)$ vektor feszíti ki, ennek egy skalárszorosát keressük.

Mivel $1^2 + 4^2 + 8^2 + 12^2 = 15^2 = 225$, ezért a sortérbe eső egyetlen megoldás $(x, y, z, w) = 2 \cdot (1, 4, 8, 12) = (2, 8, 16, 24)$.

A homogén egyenletrendszer összes megoldását meghatározva majd hozzáadva kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 16 \\ 24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

az összes megoldás.

A sortérbe eső megoldás meghatározása 2/1

P Állítsuk elő a következő egyenletrendszer összes megoldását a sortérbe eső egyetlen megoldás segítségével.

$$\begin{aligned} x+y+z+w&=3\\ x+y-z-w&=1 \end{aligned}$$

M A bővített mátrix és redukált lépcsős alakja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-s\\ s\\ 1-t\\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\\ 0\\ 1\\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1\\ 1\\ 0\\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ -1\\ 1 \end{bmatrix} t.$$

A sortérbe eső megoldás meghatározása 2/2

- A nullteret a $(-1, 1, 0, 0)$ és a $(0, 0, -1, 1)$ vektorok feszítik ki. A sortérbe eső megoldásvektor ezekre merőleges:

$$\begin{aligned} -x + y \qquad\qquad &= 0 \\ -z + w &= 0 \end{aligned}$$

- Ezekkel kibővítve az egyenletrendszert, majd megoldva

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

tehát a sortérbe eső megoldás $(1, 1, 1/2, 1/2)$, az összes megoldás

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$