Bevezetés az algebrába – A lineáris algebra forrásai

Wettl Ferenc
Algebra Tanszék

BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

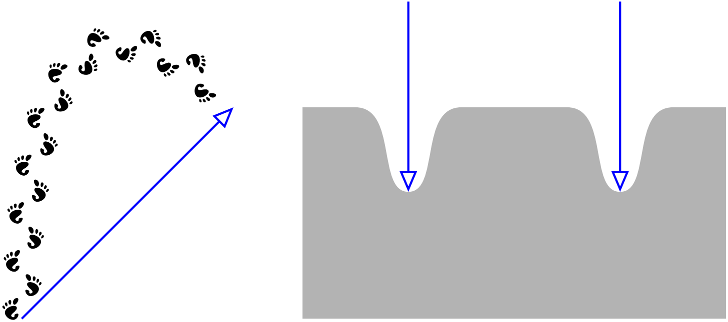
2015. december 6.

1. Vektorok
   - A 2- és 3-dimenziós tér vektorai
   - Vektorműveletek
   - Távolság, szög, orientáció

2. Vektorok koordinátás alakban
   - Descartes-féle koordinátarendszer
   - $\mathbb{R}^n$

3. Lineáris egyenletrendszerek és megoldásuk
   - Alakzatok egyenletei: egyenes, sík, hipersík
   - Lineáris egyenletrendszer és két geometriai modellje
   - Megoldás kiküszöböléssel

Kötött vektor

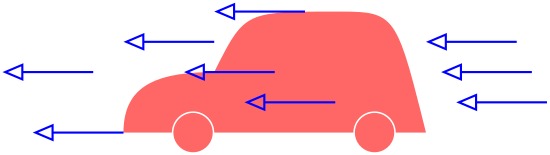


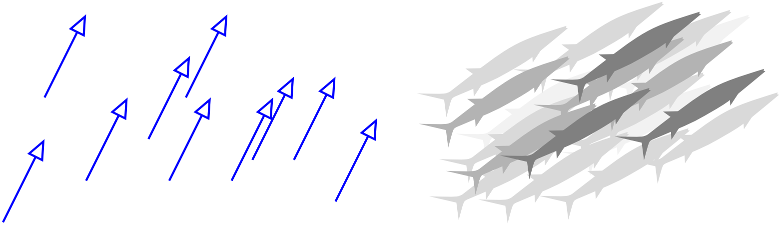
(a) *(b)*

(a) elmozdulásvektor,

(b) rugalmas testen alakváltozást okozó erő vektora.

Szabad vektor – nekünk ez kell

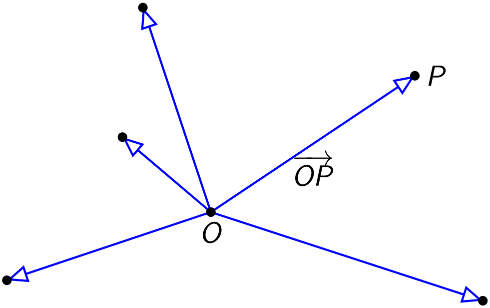




- Ha az irányított szakasz a hal, a vektor a halraj.
- Ekvivalencia reláció: két irányított szakasz ekvivalens, ha egyik a másikba „tolható”. A vektorok az ekvivalenciaosztályok.

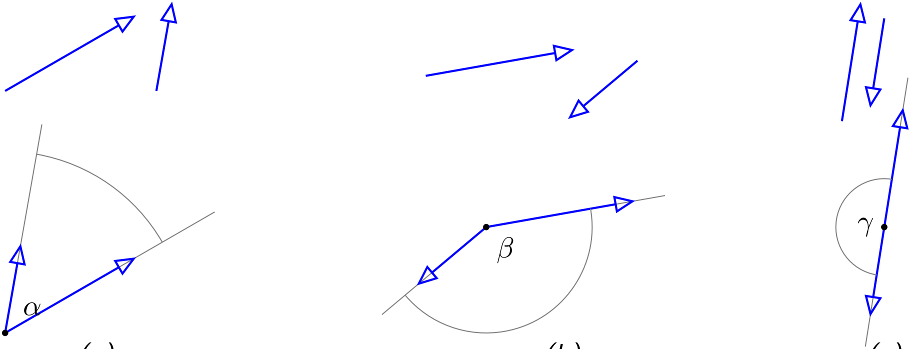
Origó

- A közös kezdőpont



- A sík pontjai és vektorai közti kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés: egy P pontnak az $\overrightarrow{OP}$ vektor felel meg, az origónak a nullvektor.

Vektorok szöge



(a) (b) (c)

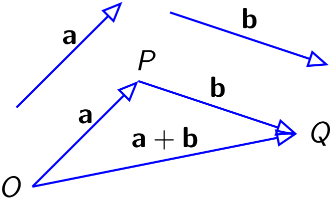
Két vektor szöge ($0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \pi$)

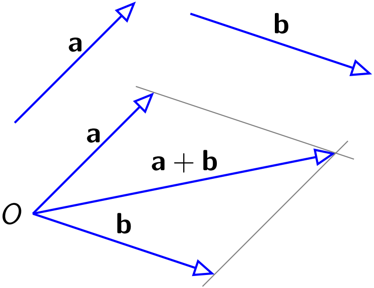
1 Vektorok
- A 2- és 3-dimenziós tér vektorai
- Vektorműveletek
- Távolság, szög, orientáció

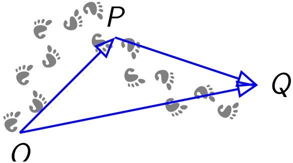
2 Vektorok koordinátás alakban
- Descartes-féle koordinátarendszer
- $\mathbb{R}^n$

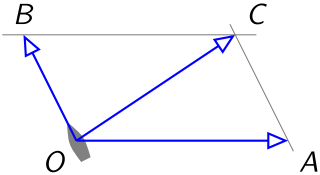
3 Lineáris egyenletrendszerek és megoldásuk
- Alakzatok egyenletei: egyenes, sík, hipersík
- Lineáris egyenletrendszer és két geometriai modellje
- Megoldás kiküszöböléssel

Vektorok összege

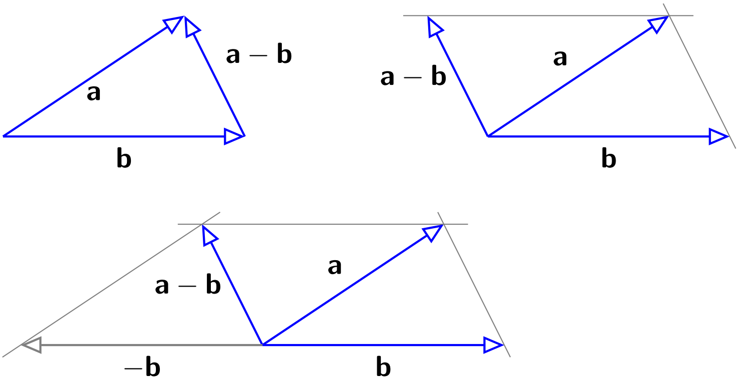




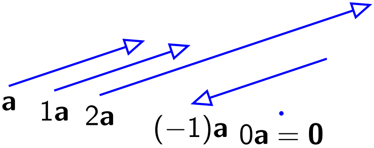




Vektorok különbsége



Vektorok skalárszorosa



Műveleti tulajdonságok

Tétel (A vektorműveletek tulajdonságai)

Ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *és* $\mathbf{c}$ *a 2- vagy 3-dimenziós tér tetszőleges vektorai,* $\mathbf{0}$ *a zérusvektor és* r, s *két tetszőleges valós szám, akkor fönnállnak az alábbi azonosságok:*

a) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$

b) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$

c) $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$

d) $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$

e) $r(s\mathbf{a})=(rs)\mathbf{a}$

f) $r(\mathbf{a}+\mathbf{b})=r\mathbf{a}+r\mathbf{b}$

g) $(r+s)\mathbf{a}=r\mathbf{a}+s\mathbf{a}$

h) $1\mathbf{a}=\mathbf{a}$ *és* $0\mathbf{a}=\mathbf{0}$

Lineáris kombináció

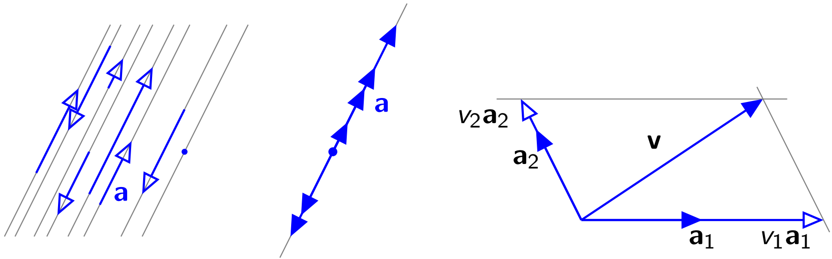
Definíció (Lineáris kombináció)

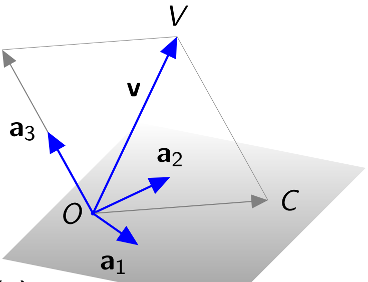
Az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \ldots$, $\mathbf{a}_k$ vektorok **lineáris kombináció**ján egy

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \ldots + c_k\mathbf{a}_k$$

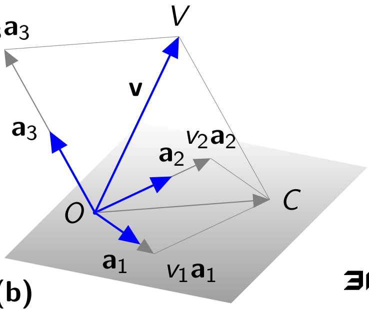
alakú vektort értünk, ahol $c_1, c_2, \ldots, c_k$ valós számok. Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{v}$ vektor **előáll** az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \ldots$, $\mathbf{a}_k$ vektorok lineáris kombinációjaként, ha vannak olyan $c_1, c_2, \ldots, c_k$ valós számok, hogy $\mathbf{v} = c_1\mathbf{a}_1 + \ldots + c_k\mathbf{a}_k$.

Egy, két és három vektor lineáris kombinációi





(a)

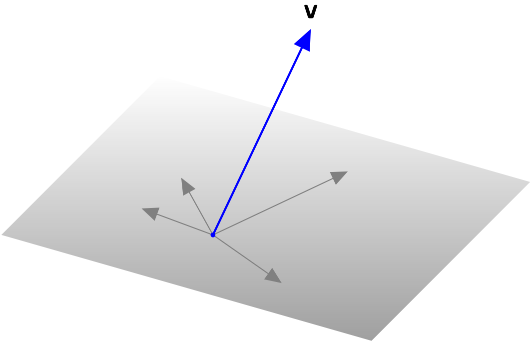


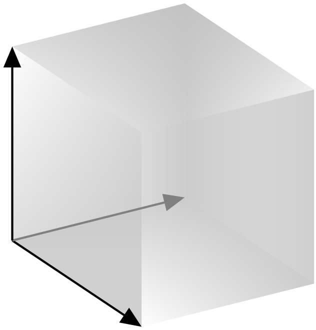
(b)

Vektorok lineáris függetlensége, lineáris összefüggősége

Definíció (Vektorok függetlensége)

Azt mondjuk, hogy egy $\mathbf{v}$ vektor **lineárisan független** az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \dots \mathbf{a}_n$ ($n \geq 1$) vektoroktól, ha $\mathbf{v}$ nem fejezhető ki e vektorok lineáris kombinációjaként. Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \dots \mathbf{a}_n$ ($n \geq 2$) vektorok **lineárisan függetlenek** ha e vektorok egyike sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként. Ha legalább egyikük kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként, azaz legalább egyikük **lineárisan függ** a többitől, akkor e vektorokat **lineárisan összefüggőknek** nevezzük. Az egyetlen vektorból álló vektorrendszert lineárisan függetlennek tekintjük, ha a vektor nem a zérusvektor.


v



Vektor előállítása lineáris kombinációként

Tétel (Síkbeli vektor felbontása)

Ha $\mathbf{a}_1$ *és* $\mathbf{a}_2$ *egy sík két lineárisan független vektora, akkor a sík minden* $\mathbf{v}$ *vektora egyértelműen előáll e vektorok lineáris kombinációjaként, azaz egyértelműen léteznek olyan* v_1 *és* v_2 *valós számok, hogy* $\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2$.

Tétel (Térbeli vektor felbontása)

Ha $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ *és* $\mathbf{a}_3$ *három lineárisan független térbeli vektor, akkor a tér minden* $\mathbf{v}$ *vektora egyértelműen előáll e vektorok lineáris kombinációjaként, azaz egyértelműen léteznek olyan* v_1, v_2 *és* v_3 *valós számok, hogy*

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + v_3\mathbf{a}_3.$$

Skaláris szorzás

Definíció (Két vektor skaláris szorzata)

Két vektor **skaláris szorzatán** a vektorok abszolút értékének és az általuk bezárt szög koszinuszának szorzatát értjük. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok skaláris szorzatát $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ jelöli, tehát

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle,$$

ahol a két vektor által bezárt szög $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle$.

Tétel (Mikor 0 a skaláris szorzat?)

Két vektor skaláris szorzata pontosan akkor 0*, ha a két vektor merőleges egymásra.*

Skaláris szorzás tulajdonságai

Tétel (A skaláris szorzás műveleti tulajdonságai)

Ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *és* $\mathbf{c}$ *tetszőleges térbeli (síkbeli) vektorok és* r *tetszőleges valós szám, akkor igazak az alábbi összefüggések:*

a) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ *(kommutativitás)*

b) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ *(disztributivitás)*

c) $r(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (r\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (r\mathbf{b})$

d) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} > 0$, *ha* $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, *és* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$, *ha* $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Hosszúság és szög kifejezése skaláris szorzással

- Tetszőleges $\mathbf{a}$ vektorra $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}||\mathbf{a}| \cos 0 = |\mathbf{a}||\mathbf{a}|$, tehát **vektor hosszára**
$$|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}, \text{ azaz } |\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}.$$
- **Két pont távolsága** (két vektor távolsága!)
$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|.$$
- Két vektor **szöge**:
$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}, \tag{1}$$
mivel a $[0, \pi]$ intervallumon a koszinusz függvény kölcsönösen egyértelmű.

Tétel (Pitagorasz-tétel (Püthagorasz-tétel, Pythagoras))

Az **a** *és* **b** *vektorokra pontosan akkor teljesül az*

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$$

összefüggés, ha **a** *és* **b** *merőlegesek egymásra.*

B
$$\begin{aligned} |\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \\ &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} && \text{disztributivitás} \\ &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} && \text{kommutativitás} \\ &\overset{?}{=} \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} && ? \\ &= |\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2, \end{aligned}$$

A ?-es egyenlőség teljesül $\iff$ $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$ $\iff$ $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$.

Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség

Tétel (Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség)

Két vektor skaláris szorzatának abszolút értéke sosem nagyobb abszolút értékeik szorzatánál, azaz

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \le |\mathbf{a}||\mathbf{b}|.$$

B $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}||\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle| \leqslant |\mathbf{a}||\mathbf{b}|.$

Háromszög-egyenlőtlenség

Tétel (Háromszög-egyenlőtlenség)

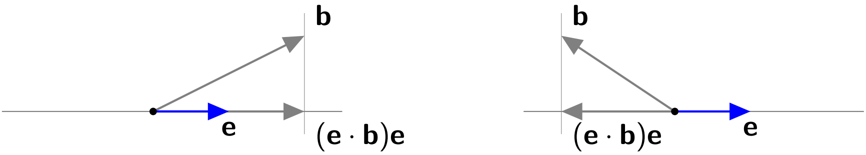
Bármely két $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *vektorra*

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|.$$

B Mivel az egyenlőtlenség mindkét oldalán nemnegatív szám áll, ezért vele ekvivalens egyenlőtlenséghez jutunk, ha mindkét oldalt négyzetre emeljük.

$$\begin{aligned}
|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \\
&= |\mathbf{a}|^2 + 2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) + |\mathbf{b}|^2 && \text{ld. Pitagorasz-tétel} \\
&\le |\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| + |\mathbf{b}|^2 \\
&\le |\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| + |\mathbf{b}|^2 \\
&= (|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^2 .
\end{aligned}$$

Egységvektorral való szorzás és merőleges vetítés



Tétel (Egységvektorral való szorzás geometriai jelentése)

Ha $\mathbf{e}$ *egységvektor, akkor a* $\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{e}\cdot\mathbf{b})\mathbf{e}$ *vektor a* $\mathbf{b}$ *vektornak az* $\mathbf{e}$ *egyenesére való merőleges vetülete. Az* $\mathbf{e}\cdot\mathbf{b}$ *szorzat e vetület előjeles hossza, mely pozitív, ha* $\hat{\mathbf{b}}$ *és* $\mathbf{e}$ *egyirányúak, és negatív, ha ellenkező irányúak.*

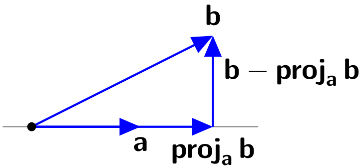
Merőleges összetevőkre bontás

Tétel (Vektor felbontása merőleges összetevőkre)

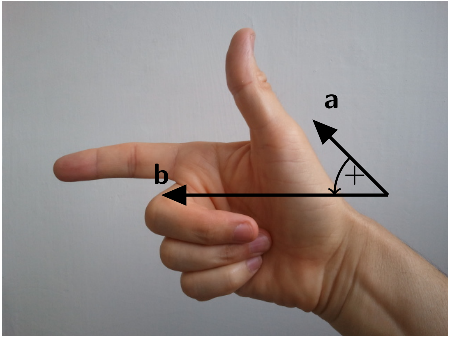
Ha $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *a sík vagy a tér két vektora, és* $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$*, akkor* $\mathbf{b}$*-nek az* $\mathbf{a}$ *egyenesére eső merőleges vetülete* $\operatorname{\mathbf{proj}}_{\mathbf{a}} \mathbf{b}$*, a* $\mathbf{b}$*-nek az* $\mathbf{a}$ *egyenesére merőleges összetevője* $\mathbf{b} - \operatorname{\mathbf{proj}}_{\mathbf{a}} \mathbf{b}$*, ahol*

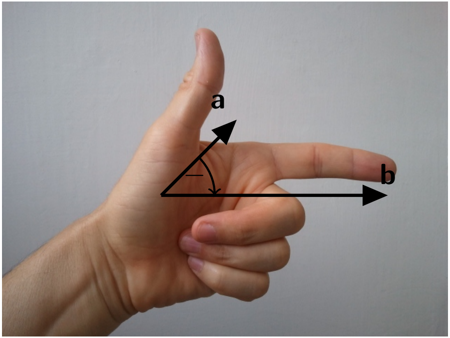
$$\operatorname{\mathbf{proj}}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a}, \qquad \mathbf{b} - \operatorname{\mathbf{proj}}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \mathbf{b} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a}.$$

B $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \rightsquigarrow \operatorname{\mathbf{proj}}_{\mathbf{e}} \mathbf{b} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{b})\mathbf{e} = \left(\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \cdot \mathbf{b}\right) \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{|\mathbf{a}|^2} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a}.$



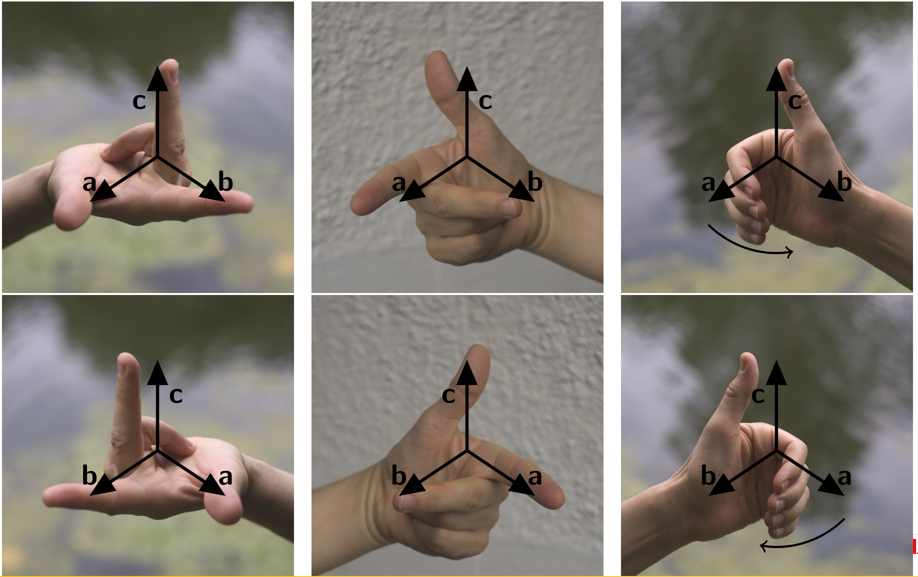
Merőlegesség és irányítás a síkban (orientáció)





Az **a** és **b** irányított szögét $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\sphericalangle}$ jelöli. Tehát míg $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} = (\mathbf{b}, \mathbf{a})_{\angle}$, addig $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\sphericalangle} = -(\mathbf{b}, \mathbf{a})_{\sphericalangle}$, és ha $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\sphericalangle} = \pi/2$, akkor $(\mathbf{a}, -\mathbf{b})_{\sphericalangle} = -\pi/2$.

Merőlegesség és orientáció a térben



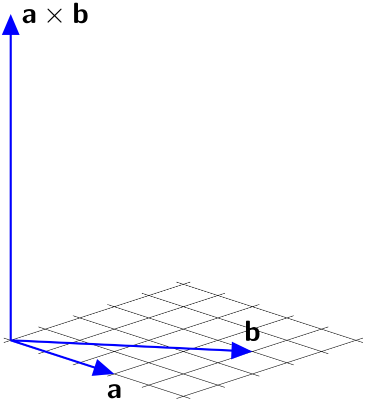
Vektori szorzás

Definíció (Vektori szorzás)

A 3-dimenziós tér két vektorának **vektori szorzatán** azt az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$-vel jelölt vektort értjük, melynek

1. **abszolút értéke** a két vektor abszolút értékének és közbezárt szöge szinuszának szorzata,
2. **iránya** merőleges mindkét vektor irányára és – ha a szorzat nem a nullvektor, akkor – $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ebben a sorrendben jobbrendszert alkot.

Vektori szorzás



A vektori szorzás tulajdonságai

Tétel (Mikor $\mathbf{0}$ a vektori szorzat?)

Két térbeli vektor vektori szorzata pontosan akkor zérusvektor, ha a két vektor párhuzamos.

Tétel (Vektori szorzás műveleti tulajdonságai)

Tetszőleges $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *és* $\mathbf{c}$ *vektorokra, valamint tetszőleges* r *valós számra igazak az alábbi összefüggések:*

a) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ *(alternáló tulajdonság)*

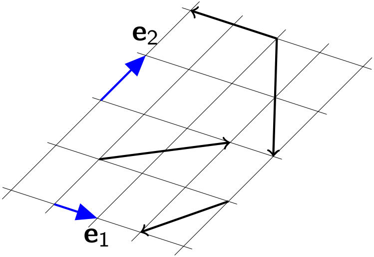
b) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$

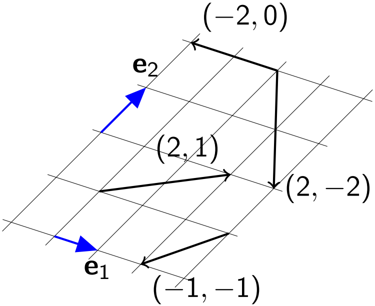
$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ *(disztributivitás)*

c) $r(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (r\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (r\mathbf{b})$

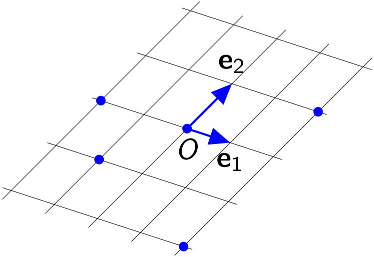
d) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|^2}$

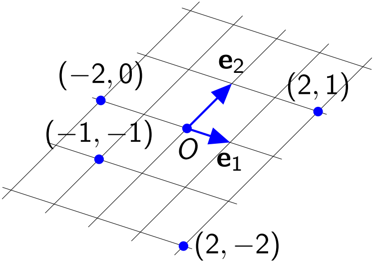
Vektorok koordinátái



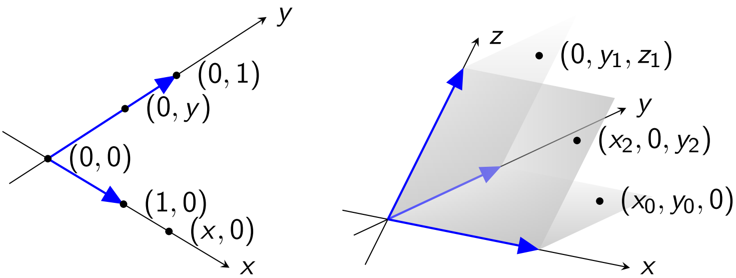


Pontok koordinátái





Pontok a koordinátatengelyen és koordinátasíkon



Műveletek koordinátás alakban megadott vektorokkal

Állítás (Vektorműveletek koordinátás alakja)

Adva van a térben egy koordinátarendszer és abban két tetszőleges $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *és* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *vektor, és egy tetszőleges* $c \in \mathbb{R}$ *valós szám.*

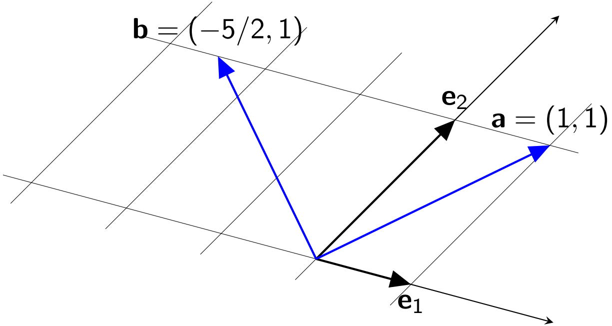
$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3), \\ \mathbf{u} - \mathbf{v} &= (u_1, u_2, u_3) - (v_1, v_2, v_3) = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3), \\ c\mathbf{u} &= c(u_1, u_2, u_3) = (cu_1, cu_2, cu_3). \end{aligned}$$

Az oszlopvektor jelölést használva

$$\mathbf{u} \pm \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \pm v_1 \\ u_2 \pm v_2 \\ u_3 \pm v_3 \end{bmatrix}, \quad c\mathbf{u} = c \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cu_1 \\ cu_2 \\ cu_3 \end{bmatrix}.$$

Skaláris szorzás koordinátarendszerben

P Tekintsünk egy olyan síkbeli koordinátarendszert, ahol az első alapvektor hossza 1, a másodiké 2, és a kettőjük közti szög $\pi/3$. Számítsuk ki az $\mathbf{a} = (1, 1)$ és a $\mathbf{b} = (-5/2, 1)$ vektorok skaláris szorzatát.



Skaláris szorzás koordinátarendszerben

M Az alapvektorok hosszát és szögét ismerve ki tudjuk számítani az alapvektorok skaláris szorzatait:

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1, \quad \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 2^2 = 4, \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 1 \cdot 2 \cdot \cos\frac{\pi}{3} = 1.$$

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \cdot (-\frac{5}{2}\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \\ &= -\frac{5}{2}\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + (1 - \frac{5}{2})\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 \\ &= -\frac{5}{2} - \frac{3}{2} + 4 \\ &= 0, \end{aligned}$$

E koordinátarendszerben a skaláris szorzás általános képlete:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2) \cdot (v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2) \\ &= u_1 v_1 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + (u_1 v_2 + u_2 v_1)\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + u_2 v_2 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 \\ &= u_1 v_1 + u_1 v_2 + u_2 v_1 + 4 u_2 v_2. \end{aligned}$$

A derékszögű koordinátarendszer

- Ha az alapvektorok merőlegesek, más szóval **ortogonálisak** egymásra és egységnyi hosszúak, az alapvektorrendszert **ortonormált bázisnak** nevezzük.
- $$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= (u_1\mathbf{i}+u_2\mathbf{j})\cdot(v_1\mathbf{i}+v_2\mathbf{j})\\ &= u_1v_1\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}+(u_1v_2+u_2v_1)\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}+u_2v_2\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}\\ &= u_1v_1+u_2v_2\end{aligned}$$

Állítás (Skaláris szorzat ortonormált koordinátarendszerben)

A síkbeli $\mathbf{u}=(u_1,u_2)$ *és* $\mathbf{v}=(v_1,v_2)$, *illetve a térbeli* $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$ *és* $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$ *vektorok skaláris szorzata ortonormált koordinátarendszerben*

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=u_1v_1+u_2v_2,\ \textit{illetve}\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3.$$

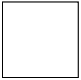
Paralelogramma területe, paralelepipedon térfogata

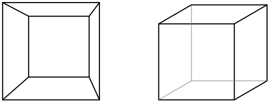
- Mutassuk meg, hogy az (a, b) és a (c, d) vektorok által kifeszített parallelogramma területe
$$|ad - bc|.$$
Mi a jelentése az $ad - bc$ előjelének?
- $|(a, b, 0) \times (c, d, 0) = (0, 0, ad - bc)| = |ad - bc|$
- Mutassuk meg, hogy az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ és $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata
$$|a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1|$$
Mi a jelentése az
$a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$ előjelének?
- $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$

1. Vektorok
   - A 2- és 3-dimenziós tér vektorai
   - Vektorműveletek
   - Távolság, szög, orientáció
2. Vektorok koordinátás alakban
   - Descartes-féle koordinátarendszer
   - $\mathbb{R}^n$
3. Lineáris egyenletrendszerek és megoldásuk
   - Alakzatok egyenletei: egyenes, sík, hipersík
   - Lineáris egyenletrendszer és két geometriai modellje
   - Megoldás kiküszöböléssel

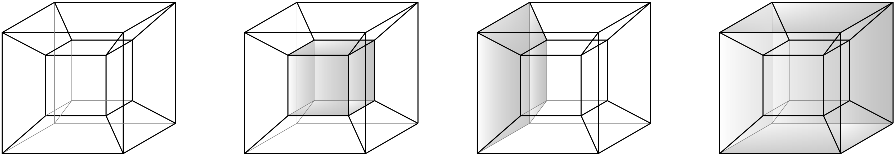
A négydimenziós kocka ábrázolása a síkban

1D:

2D: 

3D: 

4D:



Vektorok összeadása és skalárral szorzása $\mathbb{R}^n$-ben

Definíció

Legyen $c \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges valós, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ az $\mathbb{R}^n$ tér két tetszőleges vektora. E két vektor összegét és egyikük c-szeresét a következő képletekkel definiáljuk:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$$
$$c\mathbf{u} = (cu_1, cu_2, \dots, cu_n).$$

Az összeadás és skalárral szorzás tulajdonságai

T Legyen $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges, $c, d \in R$ teszőleges. Jelölés: $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$, $-\mathbf{u} = (-u_1, -u_2, \dots, -u_n)$.

a) $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ a + művelet nem vezet ki $\mathbb{R}^n$-ből
b) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ kommutatív
c) $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ asszociatív
d) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ zérusvektor
e) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ ellentett vektor
f) $c\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ e szorzás nem vezet ki $\mathbb{R}^n$-ből
g) $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$ a két szorzás kompatibilis
h) $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$ disztributív
i) $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$ disztributív
j) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$ szorzás 1-gyel

– $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$
– $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$
– $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$

Lineáris kombináció, lineáris függetlenség

- Mutassuk meg, hogy az $\mathbb{R}^n$-beli $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots,$ $\mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$ vektorok lineárisan függetlenek, és hogy $\mathbb{R}^n$ minden vektora egyértelműen előáll ezek lineáris kombinációjaként!

Tétel (Lineáris függetlenség)

Tetszőleges $\mathbb{R}^n$-beli $\mathcal{V} = \{\, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \,\}$ vektorrendszerre az alábbi két állítás ekvivalens:

1. *$\mathcal{V}$ **lineárisan független**, azaz $k > 1$ esetén egyik vektora sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként, $k = 1$ esetén pedig a vektor nem a zérusvektor.*
2. *A zérusvektor csak egyféleképp – a triviális módon – áll elő $\mathcal{V}$ lineáris kombinációjaként. Másként fogalmazva, a c_1, $c_2, \ldots, c_k$ skalárokkal vett lineáris kombináció csak akkor lehet a nullvektor, azaz $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ csak akkor állhat fenn, ha $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$.*

Lineáris függetlenség

Bizonyítás.

Ha a vektorrendszer csak egy vektorból áll, akkor valóban, pontosan akkor lineáris független, azaz pontosan akkor nem a nullvektor, ha a $c\mathbf{v} = \mathbf{0}$ csak $c = 0$ esetén állhat fenn.

($\Longleftarrow$) Tfh valamelyik vektor – például a $\mathbf{v}_1$ – kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként, azaz $\mathbf{v}_1 = d_2\mathbf{v}_2 + \ldots + d_k\mathbf{v}_k$, vagyis átrendezés után $(-1)\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \ldots + d_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$. Mivel $\mathbf{v}_1$ együtthatója nem 0, így elő tudtuk állítani a nullvektort olyan lineáris kombinációként, melyben nem minden együttható 0.

($\Longrightarrow$) Ha van olyan – nem csupa 0 együtthatójú – lineáris kombináció, mely a nullvektorral egyenlő, azaz $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$, de valamelyik együttható – például a c_1 – nem 0, akkor $\mathbf{v}_1$ kifejezhető a többi vektor lineáris kombinációjaként: $\mathbf{v}_1 = -\frac{c_2}{c_1}\mathbf{v}_2 - \ldots - \frac{c_k}{c_1}\mathbf{v}_k$. □

Lineáris összefüggőség

Tétel

Egy nullvektortól különböző elemekből álló, legalább kételemű $\mathbb{R}^n$-beli $V = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \}$ vektorrendszer pontosan akkor lineárisan összefüggő, ha van olyan $t \geq 2$ index, hogy $\mathbf{v}_t$ a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \dots$, $\mathbf{v}_{t-1}$ vektorok lineáris kombinációja.

Bizonyítás.

Tfh a vektorrendszer összefüggő, és legyen t az a legkisebb egész, melyre a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \dots$, $\mathbf{v}_t$ vektorok már összefüggők. Mivel $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, ezért az első vektor nem lehet összefüggő, ezért $t \geq 2$. E vektorok összefüggősége miatt vannak olyan c_i konstansok, melyekkel $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_t\mathbf{v}_t = \mathbf{0}$.Biztos, hogy $c_t \neq 0$, különben már a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \dots$, $\mathbf{v}_{t-1}$ vektorok is lineáris összefüggők lennének, és ez ellentmond t definíciójának. Így
$\mathbf{v}_t = \frac{-c_1}{c_t}\mathbf{v}_1 + \frac{-c_2}{c_t}\mathbf{v}_2 + \cdots + \frac{-c_{t-1}}{c_t}\mathbf{v}_{t-1}$.
A másik irányú implikáció definíció szerint igaz. □

Skaláris szorzás $\mathbb{R}^n$-ben

Definíció (Skaláris szorzás $\mathbb{R}^n$-ben)

Legyen $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ az $\mathbb{R}^n$ tér két tetszőleges vektora. Skaláris szorzatukon a következő kifejezést értjük:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n.$$

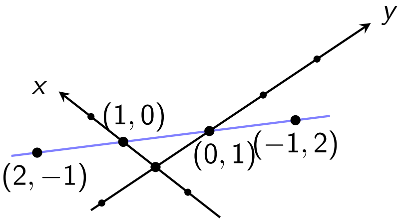
Tétel (A skaláris szorzás tulajdonságai)

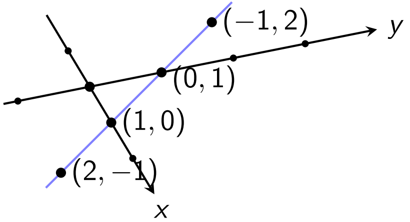
Legyen $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *és* $\mathbf{w}$ *az* $\mathbb{R}^n$ *három tetszőleges vektora, és legyen* c *egy teszőleges valós. Ekkor*

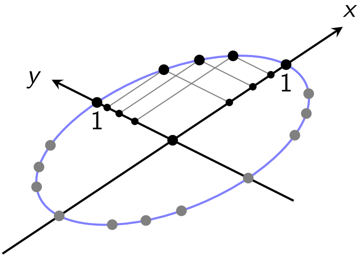
a)	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$	*a művelet fölcserélhető (kommutatív)*
b)	$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$	*disztributív*
c)	$(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$	*a két szorzás kompatibilis*
d)	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ *és* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ *pontosan akkor teljesül, ha* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.	

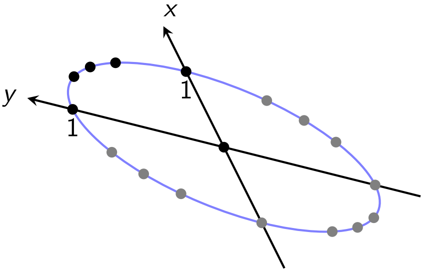
1. Vektorok
   - A 2- és 3-dimenziós tér vektorai
   - Vektorműveletek
   - Távolság, szög, orientáció
2. Vektorok koordinátás alakban
   - Descartes-féle koordinátarendszer
   - $\mathbb{R}^n$
3. Lineáris egyenletrendszerek és megoldásuk
   - Alakzatok egyenletei: egyenes, sík, hipersík
   - Lineáris egyenletrendszer és két geometriai modellje
   - Megoldás kiküszöböléssel

Alakzatok és egyenletek









Alakzat implicit egyenletrendszere

Definíció

Egy geometriai alakzat egy adott koordinátarendszerre vonatkozó **(implicit) egyenletrendszerén** olyan egyenletrendszert értünk, melynek egyszerre minden egyenletét kielégítik a térnek az alakzathoz tartozó pontjai, de más pontok nem. Az egyenletet **vektoregyenletnek** nevezzük, ha nem a pontok koordinátáira, hanem a pontokba mutató vektorokra írjuk fel. Egy alakzat m egyenletből álló egyenletrendszerének, illetve m vektoregyenletből álló egyenletrendszerének általános alakja

$$\left\{\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}\right. \qquad \text{illetve} \qquad \left\{\begin{aligned} F_1(\mathbf{r}) &= 0 \\ &\vdots \\ F_m(\mathbf{r}) &= 0 \end{aligned}\right.$$

ahol $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ a tér egy pontja, és $\mathbf{r}$ az oda mutató vektor.

Alakzat explicit egyenletrendszere

Definíció

Egy geometriai alakzat egy adott koordinátarendszerre vonatkozó **(explicit) egyenletrendszerén** olyan egyenletrendszert értünk, melyben az egyenletek bal oldalán a pontok koordinátáit megadó változók, jobb oldalán adott paraméterek függvényei szerepelnek. Általános alakja

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(t_1, t_2, \dots, t_k) \\ &\vdots \\ x_n &= f_n(t_1, t_2, \dots, t_k) \end{aligned} \qquad \text{vagy vektoregyenlet alakban} \quad \mathbf{r} = \mathbf{f}(t_1, t_2, \dots, t_k),$$

ahol $t_1 \in I_1$, $t_2 \in I_2, \dots$, $t_n \in I_n$, és $I_1, \dots, I_n \subseteq \mathbb{R}$, ahol $\mathbf{f}$ egy $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ függvény. (Szokás **paraméteres egyenletrendszernek** is nevezni.)

		Explicit vektoregyenlet	Implicit egyenlet(rendszer)
Síkban	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	$Ax + By = C$
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	$A_1x + B_1y = C_1$ $A_2x + B_2y = C_2$
Térben	sík	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$	$Ax + By + Cz = D$
	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	$A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	$A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$ $A_3x + B_3y + C_3z = D_3$
$\mathbb{R}^n$-ben	hipersík	???	$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$
	sík	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$	???
	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	???
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	???

Lineáris egyenlet

D Az

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \qquad (2)$$

alakra hozható egyenletet az x_1, $x_2 \ldots x_n$ ismeretlenekben **lineáris egyenletnek** nevezzük, ahol a_1, $a_2, \ldots$ és a_n, valamint b konstansok. Az a_1, $a_2, \ldots$ és a_n konstansokat az egyenlet **együtthatóinak**, b-t az egyenlet **konstans tagjának** nevezzük.

P Lineárisak-e az x, y, illetve az x, y és z változókban?

- $xz - y = 0$, $x + 2y = 3^z$,
- $x \sin z + y \cos z + y = z^2$, $0 = 2$,
- $x = y$, $x = 3 - y + 2z$, $x - y + 0z = 0$, $x + y - 2z = 3$
- $\frac{x}{z} + \frac{y}{z} + 2 = 0$, $x + y + 2z = 0$?

Lineáris egyenletrendszer

D **Lineáris egyenletrendszer**en ugyanazokban a változókban lineáris egyenletek egy véges halmazát értjük. Általános alakja:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \tag{*}$$

ahol x_1, $x_2, \ldots x_n$ az ismeretlenek, a_{ij} együttható, b_i konstans tag. Ha mindegyik egyenlet konstans tagja 0, a lineáris egyenletrendszer **homogén**, ha csak egy is különbözik 0-tól, **inhomogén**.

- Lineáris az x és y változókban:

$$\begin{aligned} ax + y &= 2a \\ x - \frac{1}{a}y &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x - y &= 0 \\ -x + 2y &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= 1 \\ 0 &= 2 \end{aligned} \qquad x + y = 1$$

D Lineáris egyenletrendszer megoldása] Azt mondjuk, hogy a rendezett $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ szám-n-es **megoldása** a (*) egyenletrendszernek, ha megoldása minden egyenletnek, azaz ha minden egyenletet kielégít az $x_1 = u_1$, $x_2 = u_2, \ldots$, $x_n = u_n$ helyettesítéssel. Ha e szám-n-est vektornak tekintjük, **megoldásvektorról** beszélünk. Az összes megoldás halmazát az egyenletrendszer **megoldáshalmaz**ának nevezzük. Egy egyenletrendszert **konzisztensnek** (vagy **megoldhatónak**) nevezünk, ha megoldáshalmaza nem üres. Ellenkező esetben az egyenletrendszer **inkonzisztens** (**nem megoldható**).

M Ha egy egyenletrendszer több egyenletből áll, mint ahány ismeretlene van, **túlhatározottnak** nevezzük, míg ha kevesebb egyenletből áll, **alulhatározottnak**.

Ekvivalens lineáris egyenletrendszerek

- Tekintsük az alábbi három egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= 3 \\ y &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 1 \end{aligned} \tag{3}$$

Mindháromnak $(x, y) = (2, 1)$ az egyetlen megoldása.

D Azonos ismeretlenekkel felírt két egyenletrendszert **ekvivalensnek** nevezünk, ha megoldásaik halmaza azonos.

Tétel (Ekvivalens átalakítások)

Egyenletrendszert ekvivalens egyenletrendszerbe visznek át:

1. *két egyenlet felcserélése;*
2. *egy egyenlet nem nulla számmal való szorzása;*
3. *egy egyenlet konstansszorosának egy másikhoz adása.*
4. *egy* $0 = 0$ *alakú egyenlet elhagyása (csökkenti az egyenletek számát!)*

Mátrixok

- Számtáblázatok: **mátrixok**.
- Általános alakja:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}, \quad \mathbf{A} = [a_{ij}]$$

- az első index jelöli a sor, a második az oszlop számát
- Az $\mathbf{A}$ mátrix i-edik sorára az $(\mathbf{A})_{i*}$, j-edik oszlopára az $\mathbf{a}_j$ vagy az $(\mathbf{A})_{*j}$, elemére az $(\mathbf{A})_{ij}$ jelölés is használatos.

Egyenletrendszer mátrixa és bővített mátrixa

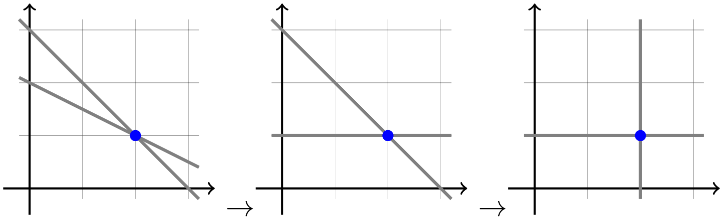
D egyenletrendszer **együtthatómátrixa** az egyenletek együtthatóit, míg **mátrixa** (**bővített** mátrixa) az egyenletek együtthatóit és konstans tagjait tartalmazza.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Sormodell 2 ismeretlennel: egyenesek metszete

P Egy egyenletrendszer és megoldása:

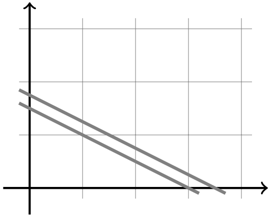
$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x + y &= 3 \\ y &= 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

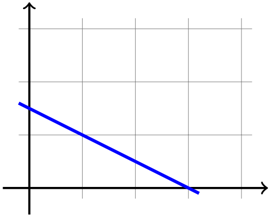


Sormodell 2 ismeretlennel: egyenesek metszete

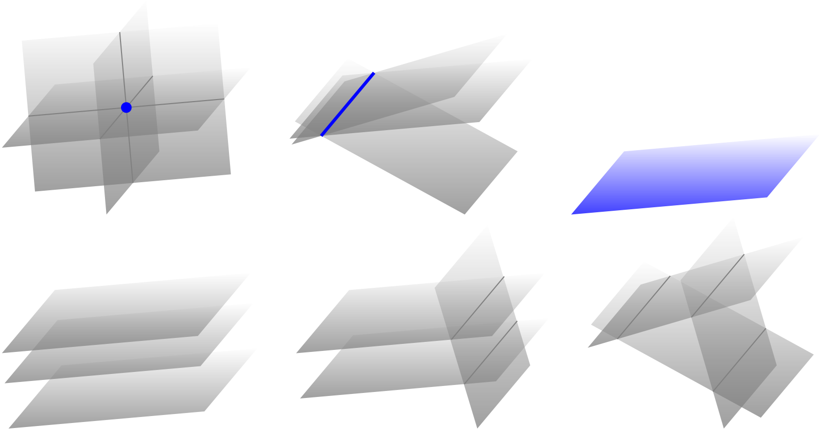
P Két másik egyenlet:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x + 4y &= 7 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x + 4y &= 6 \end{aligned}$$





Sormodell 3 ismeretlennel: síkok metszete



Sormodell: hipersíkok metszete

Állítás

Ha egy n-ismeretlenes egyenlet bal oldalán nem minden együttható 0*, akkor az egyenletet kielégítő pontok (azaz az egyenlet megoldásai) egy hipersíkot alkotnak* $\mathbb{R}^n$*-ben. Ha egy n-ismeretlenes egyenletrendszer m ilyen egyenletből áll, akkor az egyenletrendszer megoldása a nekik megfelelő m hipersík közös része* $\mathbb{R}^n$*-ben.*

- Az i-edik egyenlet:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i.$$

- Skalárszorzat alakban:

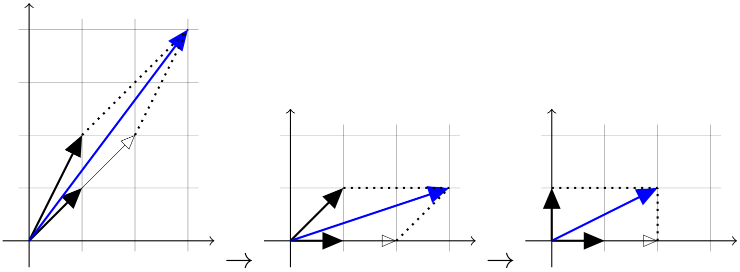
$$\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = b_i.$$

- Homogén esetben: $\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = 0$, azaz a megoldásvektor merőleges az $\mathbf{a}_{i*}$ vektorok mindegyikére.

Oszlopmodell, 2 egyenlet: síkvektorok lineáris kombinációja

P Egy egyenletrendszer és megoldása:

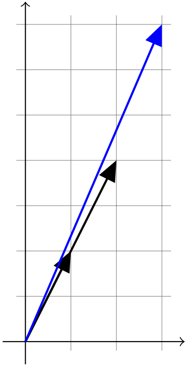
$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x + y &= 3 \\ y &= 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

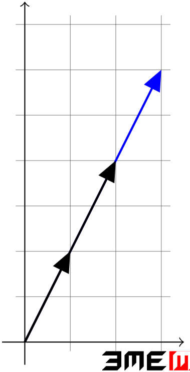


Oszlopmodell, 2 egyenlet: síkvektorok lineáris kombinációja

P Két másik egyenlet:

$$\begin{aligned} x+2y&=3 \\ 2x+4y&=7 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+2y&=3 \\ 2x+4y&=6 \end{aligned}$$





Oszlopmodell: vektorok lineáris kombinációja

Állítás

A (*) egyenletrendszer a következő vektoregyenlettel ekvivalens:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \ldots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

- E modell szerint egy egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha az együtthatómátrix oszlopvektorainak összes lineáris kombinációjából álló halmazban a konstans tagokból álló vektor is szerepel.

Elemi sorműveletek

- Egy mátrix sorain végzett alábbi műveleteket **elemi sorműveleteknek** nevezzük:
  - **Sorcsere:** két sor cseréje ($S_i \leftrightarrow S_j$: az i-edik és a j-edik sorok cseréje.)
  - **Beszorzás:** egy sor beszorzása egy nemnulla számmal (cS_i: az i-edik sor beszorzása c-vel)
  - **Hozzáadás:** egy sorhoz egy másik sor konstansszorosának hozzáadása ($S_i + cS_j$: a j-edik sor c-szeresének az i-edik sorhoz adása).
- Hasonlóan definiálhatók az elemi oszlopműveletek ($O_i \leftrightarrow O_j$, cO_i, $O_i + cO_j$).

Lépcsős alak

Definíció

Egy mátrix **(sor)lépcsős alakú**, ha kielégíti a következő két feltételt:

- a csupa 0-ból álló sorok (ha egyáltalán vannak) a mátrix utolsó sorai;
- bármely két egymás után következő nem-0 sorban az alsó sor elején (legalább eggyel) több 0 van, mint a fölötte lévő sor elején.

A nemnulla sorok első zérustól különböző elemét **főelemnek**, **vezérelemnek** vagy **pivotelemnek** hívjuk. Egy főelem oszlopának **főoszlop** vagy **bázisoszlop** a neve.

- A következő mátrixok lépcsős alakúak:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Gauss-módszer

- A **Gauss-módszer**, -**kiküszöbölés** vagy -**elimináció**: lineáris egyenletrendszer megoldása lépcsős alakra hozással (oszloponként haladva).

Gauss-módszer – egy megoldás

- Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert Gauss-módszerrel:

$$\begin{aligned} x+\ \ y+2z&=0\\ 2x+2y+3z&=2\\ x+3y+3z&=4\\ x+2y+\ \ z&=5 \end{aligned} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1&1&2&0\\ 2&2&3&2\\ 1&3&3&4\\ 1&2&1&5 \end{array}\right] \xrightarrow[S_4-S_1]{\substack{S_2-2S_1\\ S_3-S_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1&1&2&0\\ 0&0&-1&2\\ 0&2&1&4\\ 0&1&-1&5 \end{array}\right] \xrightarrow{S_2\leftrightarrow S_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1&1&2&0\\ 0&2&1&4\\ 0&0&-1&2\\ 0&1&-1&5 \end{array}\right] \xrightarrow{S_4-\frac{1}{2}S_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1&1&2&0\\ 0&2&1&4\\ 0&0&-1&2\\ 0&0&-\frac{3}{2}&3 \end{array}\right] \xrightarrow{S_4-\frac{3}{2}S_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1&1&2&0\\ 0&2&1&4\\ 0&0&-1&2\\ 0&0&0&0 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\begin{aligned} x+\ \ y+2z&=0\\ 2y+\ \ z&=4\\ -\ \ z&=2 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} x&=1\\ y&=3\\ z&=-2 \end{aligned} \to (x,y,z)=(1,3,-2)$$

Gauss-módszer – végtelen sok megoldás

- Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert Gauss-módszerrel:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[S_3-3S_1]{S_2-S_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{S_3-2S_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{rl} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 1 \\ 2x_3 + x_4 &= -1 \end{array}$$

- Kötött változók: x_1 és x_3, szabad változók: x_2, x_4, x_5, értékük tetszőleges: pl. $x_2 = s$, $x_4 = t$, $x_5 = u$.
- $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (\frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u, s, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t, t, u)$.

Gauss-módszer – végtelen sok megoldás

- Írjuk fel oszlopok lineáris kombinációjaként!

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Gauss-módszer – homogén lineáris egyenletrendszer

- Oldjuk meg az előző ersz-hez tartozó homogén ersz-t.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 3x_5 &= 0 \end{aligned} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0 \\ 2x_3 + x_4 \phantom{{}+x_5} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Lépcsős alakra hozás

Tétel (Lépcsős alakra hozás)

Bármely valós (vagy bármely test feletti) mátrix elemi sorműveletekkel ***lépcsős*** *alakra hozható.*

Bizonyítás.

1. nulloszlop letakarása
2. sorcsere után $a_{11} \neq 0$
3. $S_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} S_1$ után a_{11} alatt minden elem 0.
4. takarjuk le az első oszlopot és az első sort, és ha nincs több sor, VÉGE, ha van, menjünk a 1 pontra.

□

Redukált lépcsős alak (rref)

D Egy mátrix **redukált lépcsős**, ha

1. lépcsős alakú;
2. minden főelem egyenlő 1-gyel;
3. a főelemek oszlopaiban a főelemeken kívül minden elem 0;

- Vezéregyes
- A következő mátrixok redukált lépcsős alakúak:

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1 & -2 & 0 & -4\\0 & 0 & 1 & 6\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

- Algoritmus: oszloponként haladva először a vezérelemek alatt, majd csak utána az utolsó oszloptól kezdve fölöttük eliminálunk!

Redukált lépcsős alakra hozás

P Hozzuk redukált lépcsős alakra az $\begin{bmatrix}1&3&0\\1&1&2\\2&2&4\end{bmatrix}$ mátrixot!

M1

$$\begin{bmatrix}1&3&0\\1&1&2\\2&2&4\end{bmatrix}\xrightarrow[S_3-2S_1]{S_2-S_1}\begin{bmatrix}1&3&0\\0&-2&2\\0&-4&4\end{bmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{2}S_2}\begin{bmatrix}1&3&0\\0&1&-1\\0&-4&4\end{bmatrix}\xrightarrow[S_1-3S_2]{S_3+4S_2}\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

M2

$$\begin{bmatrix}1&3&0\\1&1&2\\2&2&4\end{bmatrix}\xrightarrow{S_1\leftrightarrow S_2}\begin{bmatrix}1&1&2\\1&3&0\\2&2&4\end{bmatrix}\xrightarrow[S_3-2S_1]{S_2-S_1}\begin{bmatrix}1&1&2\\0&2&-2\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[S_1-S_2]{\frac{1}{2}S_2}\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

Gauss–Jordan-módszer

- $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{\dots} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-S_3]{1/2 S_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[S_1-2S_3]{S_2-\frac{1}{2}S_3}$$
  $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{S_1-S_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & 3 \\ z & = & -2 \end{array}$$
- Tehát az egyenletrendszer egyetlen megoldása $(x, y, z) = (1, 3, -2)$.

Gauss–Jordan-módszer – végtelen sok megoldás

- $$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\cdots} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[S_1-S_2]{1/2S_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{aligned} x_1 + 2x_2 \quad + \frac{3}{2}x_4 + x_5 &= \frac{3}{2} \\ x_3 + \frac{1}{2}x_4 \quad &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

- $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (\frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u, s, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t, t, u)$,

- $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A redukált lépcsős alak egyértelműsége

Tétel (A redukált lépcsős alak egyértelmű)

Egy test elemeiből képzett minden mátrix redukált lépcsős alakra hozható. Ez az alak egyértelmű.

- Indirekt: **R** és **S** két redukált lépcsős alak. Válasszuk ki az első oszlopot, melyben különböznek, és az összes megelőző bázisoszlopot:

$$\hat{\mathbf{R}} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & r_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & r_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & r_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{vagy} \quad \hat{\mathbf{R}} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right]$$

A redukált lépcsős alak egyértelműsége 2.

- $$\hat{\mathbf{S}} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & s_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{array}\right] \quad \text{vagy} \quad \hat{\mathbf{S}} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{array}\right]$$
- Mivel oszlopok kihagyása nem változtat a sorekvivalencián, ezért az $\hat{\mathbf{R}}$ és $\hat{\mathbf{S}}$ mátrixok ekvivalensek, azaz a hozzájuk tartozó két egyenletrendszernek ugyanaz a megoldása
- $\rightsquigarrow$ vagy minden $i = 1, \dots, k$ indexre $r_i = s_i$, vagy egyik egyenletrendszer sem oldható meg, tehát $\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{S}}$, ellentmondás.
- nálunk $\mathbf{rref}(\mathbf{A})$ az a függvény lesz, mely egy $m \times n$-es mátrixhoz a redukált lépcsős alakjának a zérussorok elhagyásával kapott alakját rendeli.

Szimultán egyenletrendszerek

- $$\begin{aligned} x+y+z&=3 \\ 2x+3y+2z&=7 \\ 2x+2y+3z&=6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u+v+w&=3 \\ 2u+3v+2w&=7 \\ 2u+2v+3w&=7 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} r+s+t&=0 \\ 2r+3s+2t&=0 \\ 2r+2s+3t&=1 \end{aligned}$$
- $$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 7 & 7 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 7 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{S_2-2S_1 \\ S_3-2S_1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{S_1-S_2 \\ S_1-S_3}}$$
  $$\left[\begin{array}{ccc|ccr} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$
- Ebből leolvasható mindhárom egyenletrendszer megoldása:
  $$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$