Bevezetés az algebrába – polinomok

Wettl Ferenc
Algebra Tanszék

BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

2016. október 13.

D Legyen F test, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in F$, x egy szimbólum (változó). A $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ formális kifejezést F-beli együtthatós (vagy F feletti) egyváltozós polinomnak nevezzük. Ha $a_n \neq 0$, akkor n-et a p polinom fokának hívjuk és $\deg p$-vel jelöljük. a_n a polinom főegyütthatója. A zéruspolinom foka $-\infty$. A $p(x) = a_0$ polinomot konstans polinomnak nevezzük.

D Két polinom azonos, ha azonos fokúak, és megfelelő együtthatóik páronként azonosak.

J Az F fölötti polinomok halmazát $F[x]$ jelöli. Pl. $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{Z}_p[x]$.

D Test helyett egységelemes kommutatív gyűrű fölötti polinomok halmaza is definiálható: $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Z}_n[x]$.

D $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=0}^{m} b_k x^k := \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k) x^k$. (A kisebb fokú polinomot kiegészítjük 0 együtthatókkal.)

D $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \cdot \sum_{j=0}^{m} b_j x^j := \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k$, ahol $c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0$.

Á Egy F testben $ab = 0$ esetén $a = 0$ vagy $b = 0$ (testben nincs nullosztó).

B Ha $ab = 0$ és $a \neq 0$, akkor $b = 1b = a^{-1}ab = a^{-1}0 = 0$.

Á Ha F test és $p, q \in F[x]$, $\deg p = m$, $\deg q = n$, akkor

a) $\deg(p + q) \leqslant \max(m, n)$
b) $\deg(pq) = m + n$.

M Gyűrű felett b) nem igaz, pl. $\mathbb{Z}_6[x]$-ben $(3x)(2x + 1) = 3x$, mert $\mathbb{Z}_6$-ban $3 \cdot 2 = 0$.

B a) Ha $m \neq n$, akkor $\deg(p + q) = \max(m, n)$, de ha $m = n$, akkor a főegyütthatók összege lehet 0 is (pl. $(x + 2) + (-x + 3) = 5$).

b) $p(x) \cdot q(x) = (a_n x^n + \ldots) \cdot (b_m x^m + \ldots) = a_n b_m x^{n+m} + \ldots$, és $a_n b_m \neq 0$, mert testben nincs nullosztó.

T Legyen R egységelemes kommutatív gyűrű (például test). Ekkor $R[x]$ egységelemes kommutatív gyűrű.

- $R[x]$-ben az összeadás és a szorzás kommutatív és asszociatív művelet.
- teljesül a disztributivitás: $\forall p, q, r \in R[x] : \ (p+q)r = pr + qr$.
- Az összeadás invertálható: $\forall p, q \in R[x]\ \exists r \in R[x] : \ p + r = q$.
  Ez azzal ekvivalens, hogy létezik egy 0-val jelölt zéruspolinom, melyre bármely $p \in R[x]$ esetén $p + 0 = p$, és minden p polinomnak van $-p$-vel jelölt ellentettje (additív inverze), melyre $p + (-p) = 0$. (A zéruspolinom megegyezik a 0 konstans polinommal).
- $R[x]$-nek létezik 1-gyel jelölt egységeleme, melyre bármely $p \in R[x]$ esetén $p \cdot 1 = p$. (Ez megegyezik azzal a konstans polinommal, melynek együtthatói $a_0 = 1 \in R$, $a_k = 0 \in R$, ha $k > 0$).

K $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Z}_m[x]$ egységelemes kommutatív gyűrűk.

Definíció (Oszthatóság egységelemes kommutatív gyűrűben)

Legyen R egységelemes kommutatív gyűrű, $a, b \in R$. Azt mondjuk, hogy b osztója a-nak (a osztható b-vel), ha $\exists q \in R$, hogy $a = bq$. Jelölés: $b \mid a$.

P $x - 1 \mid x^n - 1$ a $\mathbb{Z}[x]$ gyűrűben ($n \in \mathbb{N}^+$).

P $3x \mid x^n$ a $\mathbb{Q}[x]$ gyűrűben, mert $x^n = (3x)(\frac{1}{3}x^{n-1})$.

P $x - i \mid x^2 + 1$ a $\mathbb{C}[x]$ gyűrűben, mert $x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$.

K Mik az egységek $F[x]$-ben, ha F test?

Az $1 \in \mathbb{F}[x]$ polinom osztói, azaz a nulladfokú polinomok ($a_0 \in F \setminus \{0\}$).

K Mik az egységek $\mathbb{Z}[x]$-ben?

$1, -1 \in \mathbb{Z}[x]$.

Tétel (Maradékos osztás polinomgyűrűben)

Legyen F test, és $p, q \in F[x]$ két polinom, ahol $q \neq 0$. Akkor egyértelműen léteznek olyan $h, r \in F[x]$ polinomok, hogy

$$p = qh + r, \text{ és } \deg r < \deg q.$$

B Létezés: Ha $p = 0$, akkor $h = r = 0$.
Ha $\deg p < \deg q$, akkor $h = 0$ és $r = p$, azaz $p = q \cdot 0 + p$.
A továbbiakban $\deg p \geqslant \deg q$ és $\deg p$-re vonatkozó teljes ind.:
$\deg p = 0$: $p = a$ $(a \in F) \rightsquigarrow q = b$, $h = \frac{a}{b}$, $r = 0$, ✓
$\deg p < n \to \deg p = n$: $p(x) = a_n x^n + \ldots$, $q(x) = b_m x^m + \ldots$
$p_1(x) = p(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} q(x) \rightsquigarrow \deg p_1 < n$
ha $\deg p_1 < \deg q$, akkor $r = p_1$, $p(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} q(x) + r(x)$ ✓
ha $\deg p_1 \geqslant \deg q$, akkor az indukció miatt $p_1 = qh + r \rightsquigarrow$
$p(x) = (h(x) + \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}) q(x) + r(x)$
Egyértelműség: Tfh $p = h_1 q + r_1 = h_2 q + r_2$, ekkor
$(h_1 - h_2)q = r_2 - r_1$, de $\deg(r_2 - r_1) < \deg q$,
$\deg((h_1 - h_2)q) \geqslant \deg q$ vagy $h_1 = h_2 \rightsquigarrow r_1 = r_2$ ✓

P Legyen $p(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2x - 1$, $q(x) = x - 2$. Osszuk el p-t maradékosan q-val.

M

$$\begin{array}{rl}
x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2x - 1 = (x-2)(x^3 - 2x^2 + 2) + 3 \\
\underline{-x^4 + 2x^3} \\
\quad -2x^3 + 4x^2 \\
\quad \underline{2x^3 - 4x^2} \\
\qquad\qquad 2x - 1 \\
\qquad\qquad \underline{-2x + 4} \\
\qquad\qquad\quad 3
\end{array}$$

P $\mathbb{Z}[x]$-ben a maradékos osztás nem végezhető el bármely két polinomra, például $p(x) = x^3$ nem írható $(3x^2)h(x) + r(x)$ alakba, ha $h, r \in \mathbb{Z}[x]$ és $\deg r(x) < \deg(3x^2) = 2$.

P $p(x) = x^3 + 4x + 7,\ q(x) = x + 1$

M
$$\begin{array}{rl} x^3 & +4x+7 : x+1 = x^2 - x + 5 + \dfrac{2}{x+1} \\ \underline{-x^3 - x^2} & \\ -x^2 + 4x & \\ \underline{x^2 + x} & \\ 5x + 7 & \\ \underline{-5x - 5} & \\ 2 & \end{array}$$

P $p(x) = x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12,\ q(x) = x^2 - 2x - 3$

M

$$
\begin{array}{rl}
x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 & : x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x - 2 + \dfrac{6x - 18}{x^2 - 2x - 3} \\
\underline{-x^4 + 2x^3 + 3x^2} & \\
-2x^3 + 2x^2 + 16x & \\
\underline{2x^3 - 4x^2 - 6x} & \\
-2x^2 + 10x - 12 & \\
\underline{2x^2 - 4x - 6} & \\
6x - 18 &
\end{array}
$$

Definíció (Polinomok legnagyobb közös osztója = kitüntetett közös osztó)

Legyen F test, $p, q \in F[x]$. A $d \in F[x]$ polinom a p és q polinomok legnagyobb közös osztója, ha

1. közös osztó, azaz $d \mid p$, $d \mid q$,
2. ha $c \in F[x]$, $c \mid p$ és $c \mid q$, akkor $c \mid d$.

Jelölés: $(p(x), q(x))$, $\operatorname{lnko}(p(x), q(x))$, $\gcd(p(x), q(x))$ vagy egyszerűen (p, q), $\operatorname{lnko}(p, q)$, $\gcd(p, q)$.

Tétel

Ha F test és $p, q \in F[x]$, akkor létezik a legnagyobb közös osztójuk, mely nemnulla konstans szorzótól eltekintve egyértelmű.

Bizonyítás.

Ha $p(x) = 0$, akkor $(p, q) = q$, ha $q(x) = 0$, akkor $(p, q) = p$. Feltehető, hogy $\deg p \geqslant \deg q$. Ha $q \mid p$, akkor $(p, q) = q$. Legyen $r_0 = p$, $r_1 = q$.

$$
\begin{array}{lll}
r_0 = r_1 h_1 + r_2 & r_n \mid r_0 = p & c \mid r_2 = r_0 - r_1 h_1 \\
r_1 = r_2 h_2 + r_3 & r_n \mid r_1 = q & c \mid r_3 = r_1 - r_2 h_2 \\
r_2 = r_3 h_3 + r_4 & r_n \mid r_2 & c \mid r_4 = r_2 - r_3 h_3 \\
\quad\vdots & & \\
r_{n-2} = r_{n-1} h_{n-1} + r_n & r_n \mid r_{n-2} & c \mid r_n = r_{n-2} - r_{n-1} h_{n-1} \\
r_{n-1} = r_n h_n & r_n \mid r_{n-1} &
\end{array}
$$

Tehát $d = r_n$ kitüntetett közös osztó. Az algoritmus véges lépésben véget ér, mivel $\deg r_1 > \deg r_2 > \cdots > \deg r_n$, így elérjük, hogy $\deg r_n \geqslant 0$, de $\deg r_{n+1} = -\infty$, azaz $r_{n+1}(x) = 0$. Ha d_1, d_2 két lnko, akkor $d_1 \mid d_2$, $d_2 \mid d_1 \rightsquigarrow \exists c_1, c_2 \in F[x] : d_2(x) = d_1(x)c_1(x) = d_2(x)c_2(x)c_1(x) \rightsquigarrow c_1(x)c_2(x) = 1 \rightsquigarrow c_1(x)$ és $c_2(x)$ egység $F[x]$-ben, azaz nemnulla konstans polinom. Tehát a lnko nemnulla skalárszorzótól eltekintve gyértelmű! □

P $p(x) = x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12$, $q(x) = x^2 - 2x - 3$, $(p(x), q(x)) = ?$

M Az euklideszi algoritmussal:

$$x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = (x^2 - 2x - 3) \cdot (x^2 - 2x - 2) + (6x - 18)$$

$$x^2 - 2x - 3 = \quad (6x - 18) \quad \cdot \quad (\tfrac{1}{6}x + \tfrac{1}{6}) \quad + 0$$

Tehát $(p(x), q(x)) = 6x - 18$ vagy egyszerűbb alakban $x - 3$.

P $p(x) = x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12$, $q(x) = x^2 - 4x + 3$

M $x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = (x^2 - 4x + 3) \cdot (x^2 - 4) + 0$

Tehát $(p(x), q(x)) = x^2 - 4x + 3$.

P $p(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$, $q(x) = x^2 + 2$

M $x^3 - 2x^2 + x - 1 = \quad (x^2 + 2) \quad \cdot \quad (x - 2) \quad + (-x + 3)$

$$x^2 + 2 = (-x + 3) \cdot (-x - 3) + 11$$

$$-x + 3 = \quad 11 \quad \cdot \quad (-\tfrac{1}{11}x + \tfrac{3}{11}) \quad + 0$$

Tehát $(p(x), q(x)) = 1$, azaz relatív prímek (a 11 konstansszorosa 1).

Tétel

Ha F test, $p, q, d \in F[x]$ és $d = (p, q)$, akkor léteznek olyan $u, v \in F[x]$ polinomok, hogy

$$d = up + vq$$

B ugyanúgy, mint az egészekre, a kibővített euklideszi algoritmussal.

P $p(x) = x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12$, $q(x) = x^2 - 2x - 3$,
$u(x) =?$, $v(x) =?$

M $x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = (x^2 - 2x - 3)(x^2 - 2x - 2) + (6x - 18) \rightsquigarrow$
$x - 3 = \frac{1}{6}(x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12) + (-\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3})(x^2 - 2x - 3)$.

Tétel

Legyen F test, $p, q, h \in F[x]$. Pontosan akkor léteznek olyan $u, v \in F[x]$ polinomok, hogy

$$h = up + vq,$$

ha $(p, q) \mid h$.

P $p(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$, $q(x) = x^2 + 2$, $u(x) = ?$, $v(x) = ?$

M A maradékos osztások eredményeit írjuk táblázatba:

$h(x)$	$r(x)$	$u(x)$	$v(x)$
	$x^3 - 2x^2 + x - 1$	1	0
$x - 2$	$x^2 + 2$	0	1
$-x - 3$	$-x + 3$	1	$-x + 2$
	11	$x + 3$	$-x^2 - x + 7$

Tehát $11 = (x+3)(x^3 - 2x^2 + x - 1) + (-x^2 - x + 7)(x^2 + 2)$ vagy
$1 = (\frac{1}{11}x + \frac{3}{11})(x^3 - 2x^2 + x - 1) + (-\frac{1}{11}x^2 - \frac{1}{11}x + \frac{7}{11})(x^2 + 2)$

P Állítsuk elő a $h(x) = 22x - 11$ polinomot az előző feladatbeli p és q segítségével $h = up + vq$ alakba.

M Mivel $22x - 11 = 11(2x - 1)$, ezért az előző példa eredményét $2x - 1$-gyel szorozva:
$22x - 11 = (2x^2 + 5x - 3)(x^3 - 2x^2 + x - 1) + (-2x^3 - x^2 + 15x - 7)(x^2 + 2)$

Definíció

Legyen F test. A nem konstans (zérustól és egységtől különböző) $p \in F[x]$ polinomot irreducibilisnek nevezzük, ha $p = p_1 p_2$ és $p_1, p_2 \in F[x]$ esetén p_1 vagy p_2 konstans polinom (egység $F[x]$-ben).

D Általában, ha R egységelemes, kommutatív, nullosztómentes gyűrű, akkor egy $p \in R$ elemet irreducibilisnek nevezünk, ha $p = ab$ esetén az $a, b \in R$ elemek valamelyike egység.

T Legyen F test, $p \in F[x]$. p irreducibilis $\iff$ p prím tulajdonságú.

M p prím tulajdonságú, ha $p \mid fg$ $(f, g \in F[x])$ esetén $p \mid f$ vagy $p \mid g$.

B (prím $\Rightarrow$ irreducibilis) $p = fg \rightsquigarrow p \mid fg$, de p prím tulajdonságú, így $p \mid f$ vagy $p \mid g$, azaz $fg \mid f$ vagy $fg \mid g \rightsquigarrow g$ vagy f egység, tehát p irreducibilis.

(irreducibilis $\Rightarrow$ prím) Tfh p irreducibilis, $p \mid fg$, de $p \nmid f \rightsquigarrow (p, f) = 1$

$\rightsquigarrow \exists u, v \in F[x] : up + vf = 1$

$\rightsquigarrow upg + vfg = g \rightsquigarrow p \mid g$.

Tétel

Legyen F test, és $p \in F[x]$ zérustól és egységtől különböző (nem konstans) polinom. Ekkor p egységszorzótól és sorrendtől eltekintve egyértelműen felbontható véges sok $F[x]$-beli irreducibilis polinom szorzataként.

B Felbonthatóság: deg p-re vonatkozó teljes indukcióval. $n = 1$-re ✓

Ha p irreducibilis ✓

Ha $p = p_1 p_2$ $(p_1, p_2 \in F[x])$ és $\deg p = n$, akkor $\deg p_1 < n$, $\deg p_2 < n$, az indukciós feltevés szerint p_1 és p_2 is felbomlik véges sok irred. pol. szorzatára $\rightsquigarrow$ p is.

Egyértelműség: Indirekt. Legyen $p_1 \dots p_r = q_1 \dots q_s$ a legkisebb fokú polinom, mely két különböző módon is felbomlik.

$p_1 \mid$ bal oldal $\rightsquigarrow$ $p_1 \mid$ jobb oldal $\rightsquigarrow$ p_1 irredicibilitása miatt p_1 prím

$\rightsquigarrow \exists j : p_1 \mid q_j \rightsquigarrow q_j = p_1 \cdot$ egység

$\rightsquigarrow$ egyszerűsíthetünk p_1-gyel $\rightsquigarrow$ kisebb fokú szorzatot kaptunk, ellentmondás.

K A $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}_p[x]$ polinomgyűrűkben minden polinom véges sok irreducibilis polinom szorzata (sorrendtől és nem nulla konstans szorzótól eltekintve egyértelműen).

P $\mathbb{Q}[x]$-ben: $x^4 - 2x^2 - 3 = (x^2 + 1)(x^2 - 3) = (\frac{1}{3}x^2 - 1)(3x^2 + 3)$,

$\mathbb{R}[x]$-ben: $x^4 - 2x^2 - 3 = (x^2 + 1)(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$,

$\mathbb{C}[x]$-ben: $x^4 - 2x^2 - 3 = (x + i)(x - i)(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$,

P $\mathbb{Z}_7[x]$-ben: $x^2 + 1$ irreducibilis.

Definíció

Legyen $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in R[x]$, ahol R egységelemes kommutatív gyűrű. Azt mondjuk, hogy $\alpha \in R$ a p polinom gyöke, ha $p(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1 \alpha + a_0 = 0 \in R$

Tétel (Horner-elrendezés)

Legyen R egységelemes kommutatív gyűrű,
$p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in R[x]$. Legyen $b_{n-1} = a_n$, $b_{k-1} = b_k \alpha + a_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ és $r = b_0 \alpha + a_0$ elrendezve egy táblázatban:

	a_n	a_{n-1}	$\ldots$	a_1	a_0
α	b_{n-1}	b_{n-2}	$\ldots$	b_0	r

Ekkor

$$p(x) = (x - \alpha)(b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0) + r, \qquad (1)$$

azaz a táblázatból leolvasható $p(x)$-nek $(x - \alpha)$-val való maradékos osztásának hányadosa és maradéka. A maradék megegyezik a helyettesítési értékkel, azaz $r = p(\alpha)$.

B Az (1) egyenlőséget a zárójel felbontása igazolja. (1)-ben x helyébe α-t helyettesítve kapjuk, hogy $p(\alpha) = r$.

T Legyen R egységelemes kommutatív gyűrű, $p \in R[x]$.

$$\alpha \in R \text{ gyöke } p\text{-nek} \iff (x - \alpha) \mid p(x).$$

B ($\Rightarrow$) Ha α gyöke p-nek, akkor a Horner-elrendezés alsó sorából leolvasható $p(x)$ hányadosa $(x - \alpha)$-val osztva.

($\Leftarrow$) $(x - \alpha) \mid p(x) \rightsquigarrow p(x) = (x - \alpha)h(x) \rightsquigarrow p(\alpha) = 0$.

M Polinomok maradékos osztását test fölötti polinomgyűrűkben definiáltuk, de a Horner-elrendezés azt mutatja, hogy ha R egységelemes kommutatív gyűrű és $\alpha \in R$, akkor az $(x - \alpha)$-val való maradékos osztás elvégezhető $R[x]$-ben.

D Ha az R gyűrű fölötti $p \in R[x]$ polinomnak $\alpha \in R$ gyöke, akkor az $x - \alpha$ polinomot a $p(x)$ gyöktényezőjének, a $p(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\dots(x - \alpha_n)$ alakú felírását a p gyöktényezős alakjának nevezzük.

T Test fölötti elsőfokú polinomok irreducibilisek.

T Algebrailag zárt testben (pl. $\mathbb{C}$-ben) az irreducibilis polinomok pontosan az elsőfokúak.

T Egy F test fölötti másod- vagy harmadfokú $p \in F[x]$ polinom pontosan akkor irreducibilis, ha nincs gyöke F-ben.

B ($\Rightarrow$) Ha van gyöke, akkor p a gyöktényezővel osztható, ami elsőfokú, tehát p nem irreducibilis.

($\Leftarrow$) Ha nem irreducibilis, akkor felbomlik alacsonyabb fokú polinomok szorzatára, melyek egyike elsőfokú, mondjuk $bx + c$. Ekkor $x = -c/b$ a p egy gyöke.

P Az állítás magasabb fokú polinomokra már nem igaz: a $p(x) = x^4 - 5x^2 + 6 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom nem irreducibilis, mert $p(x) = (x^2 - 2)(x^2 - 3)$, de nincs racionális gyöke (gyökei $\mathbb{R}$-ben $\pm\sqrt{2}$, $\pm\sqrt{3}$).

D Legyen F test, és $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in F[x]$. A p polinom deriváltján a

$$p'(x) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k x^{k-1} \in F[x]$$

polinomot értjük.

Á A $' : F[x] \to F[x]$ leképezés a következő tulajdonságokkal rendelkezik, bármely $p, q \in F[x]$ polinom, $c \in F[x]$ konstans polinom, $\alpha \in F$ testelem és $m \in \mathbb{N}^+$ esetén:

- $c' = 0 \in F[x]$
- $(p+q)' = p' + q'$
- $(\alpha p)' = \alpha p'$
- $(pq)' = p'q + pq'$
- $(p^m)' = mp^{m-1}p'$

P $\mathbb{Z}_{11}$-ben: $(6x^8 + 5x^4 + 8x + 4)' = 4x^7 + 9x^3 + 8$.

P Ha $p, q, r \in F[x]$, akkor $(pqr)' = p'qr + pq'r + pqr'$.

P $F[x]$-ben: $((x-\alpha)^n)' = n(x-\alpha)^{n-1}$.

D Amh $\alpha \in F$ a $p \in F[x]$ polinomnak pontosan k-szoros gyöke, ha $p(x) = (x-\alpha)^k q(x)$ $(q \in F[x])$, de $q(\alpha) \neq 0$.

M Ez azt jelenti, hogy $(x-\alpha)^k \mid p(x)$, de $(x-\alpha)^{k+1} \nmid p(x)$.

T $\alpha \in F$ a $p \in F[x]$ polinomnak pontosan akkor többszörös gyöke, ha $p(\alpha) = p'(\alpha) = 0$.

B $(\Rightarrow)$ $p(x) = (x-\alpha)^k q(x)$ $k > 1 \rightsquigarrow$
$p'(x) = k(x-\alpha)^{k-1} q(x) + (x-\alpha)^k q'(x) \rightsquigarrow$
$p'(\alpha) = 0$
$(\Leftarrow)$ Legyen $p(\alpha) = p'(\alpha) = 0$. Indirekt tfh α csak egyszeres gyök, azaz $p(x) = (x-\alpha)q(x)$ és $q(\alpha) \neq 0 \rightsquigarrow$
$p'(x) = q(x) + (x-\alpha)q'(x) \rightsquigarrow p'(\alpha) = q(\alpha) + 0 \neq 0$, ellentmondás.

M A tétel bizonyításából látszik, hogy ha α a p polinom k-szoros gyöke, akkor p'-nek legalább $k-1$-szeres gyöke.

K Az F test fölötti $p \in F[x]$ polinom többszörös gyökei megegyeznek (p, p') gyökeivel.

B $(\Rightarrow)$ p-nek α többszörös gyöke $\rightsquigarrow$ p'-nek gyöke $\rightsquigarrow$ (p, p')-nek gyöke
$(\Leftarrow)$ α gyöke (p, p')-nek $\rightsquigarrow$ α nem lehet p-nek csak egyszeres gyöke

P Igazoljuk, hogy $\mathbb{Z}_{11}$ fölött a $x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 5x + 5$ polinomnak a $2 \in \mathbb{Z}_{11}$ többszörös gyöke.

1M $p(2)$ kiszámítása Horner-módszerrel:

	1	4	9	5	5
2	1	6	10	3	0

$p'(x) = 4x^3 + x^2 + 7x + 5$, $p'(2) =?$

	4	1	7	5
2	4	9	3	0

$p''(x) = x^2 + 2x + 7$, $p''(2) =?$

	1	2	7
2	1	4	4

Tehát a 2 pontosan kétszeres gyöke p-nek, mivel többszörös gyök és ha legalább háromszoros gyök lenne, akkor $p''(\alpha) = 0$ lenne.

2M Most csak a Horner-elrendezést alkalmazva:

	1	4	9	5	5
2	1	6	10	3	0

Eszerint $x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 5x + 5 = (x^3 + 6x^2 + 10x + 3)(x - 2)$.

	1	6	10	3
2	1	8	4	0

Tehát $p(x) = (x^2 + 8x + 4)(x - 2)^2$.

	1	8	4
2	1	10	2

Tehát $p(x)$ már nem osztható $(x - 2)^3$-nel.

M $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) = ax^2 - a(\alpha_1 + \alpha_2)x + a\alpha_1\alpha_2 \rightsquigarrow$
$\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{b}{a}$, $\alpha_1\alpha_2 = \frac{c}{a}$

Tétel (Gyökök és együtthatók kapcsolata)

Tfh
$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n) \in F[x]$,
ahol F test. Ekkor

$$-\frac{a_{n-1}}{a_n} = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$$
$$\frac{a_{n-2}}{a_n} = \alpha_1\alpha_2 + \ldots \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n$$
$$\vdots$$
$$(-1)^n\frac{a_0}{a_n} = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$$

M Az Algebra alaptételét több különböző alakban is ki szokás mondani:

1. $\mathbb{C}$ algebrailag zárt (azaz minden $\mathbb{C}[z]$-beli legalább elsőfokú polinomnak van gyöke).
2. Minden $a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 \in \mathbb{C}[z]$ polinom, ahol $n \in \mathbb{N}^+$, $a_n \neq 0$, a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelműen felírható

$$a_n(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)\ldots(z - \alpha_n) \tag{2}$$

alakban, ahol $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$.

B ($1 \Rightarrow 2$) Teljes indukció: ha $\deg p = 1$, azaz $p(z) = a_1 z + a_0$, akkor $\alpha_1 = -a_0/a_1$ az egyetlen gyök ($a_1 \neq 0$).

Legyen $p \in \mathbb{C}[z]$ n-edfokú, és legyen $\alpha \in \mathbb{C}$ az 1 szerint létező gyök, azaz $p(\alpha) = 0$.

α gyök $\rightsquigarrow z - \alpha \mid p(z)$, azaz $p(z) = (z - \alpha)h(z)$, ahol $\deg h = n - 1$. Az indukciós feltevés szerint az n-nél kisebb fokúakra fennáll 2. Így p összesen n elsőfokú tényező szorzatának konstansszorosa.

T Ha a $p \in \mathbb{R}[x]$ polinomnak $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gyöke, akkor $\bar{\alpha}$ is gyöke, és e két gyök multiplicitása megegyezik.

B (A konjugált is gyök) $p(\alpha) = a_n\alpha^n + \ldots + a_1\alpha + a_0 = 0$ $(a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}) \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} 0 = \bar{0} &= \bar{a}_n\overline{\alpha^n} + \ldots + \bar{a}_1\bar{\alpha} + \bar{a}_0 \qquad\qquad a_k \in \mathbb{R} \text{ így } \bar{a}_k = a_k \\ &= a_n\bar{\alpha}^n + \ldots + a_1\bar{\alpha} + a_0 \\ &= p(\bar{\alpha}) \end{aligned}$$

(Azonos a multiplicitás) p fokára vonatkozó teljes indukcióval.
$\deg p = 1$ vagy 2 esetén ✓

p-nek α és $\bar{\alpha}$ gyöke, azaz $p(z) = (z - \alpha)(z - \bar{\alpha})q(z)$.

Mivel $(z - \alpha)(z - \bar{\alpha}) = z^2 - (\alpha + \bar{\alpha})z + \alpha\bar{\alpha} = z^2 - (2\operatorname{Re}\alpha)z + |\alpha|^2$ valós együtthatós, így q is valós együtthatós, melyben az indukciós feltevés szerint α és $\bar{\alpha}$ multiplicitása azonos. ✓

K $\mathbb{R}[x]$-ben irreducibilisek az elsőfokú polinomok és azok a másodfokúak, amelyeknek nincs valós gyöke.

B Ha egy $p \in \mathbb{R}[x]$ polinom irreducibilis, és $\alpha \in \mathbb{C}$ egy gyöke, akkor $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $x - \alpha$ osztója, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ esetén $(x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) \in \mathbb{R}[x]$ osztója $p(x)$-nek.

K Minden n-edfokú $p \in \mathbb{R}[x]$ polinom felírható

$$p(x) = a_n \prod_{j=1}^{r} (x - \alpha_j) \prod_{k=1}^{s} (x^2 + b_k x + c_k),$$

ahol $n = r + 2s$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$ és $x^2 + b_k x + c_k$ irreducibilis $\mathbb{R}$ fölött (azaz negatív diszkriminánsú).

P $x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1 = (x - 1)(x^2 + 1)^2$

M Az $x^3 + ax^2 + bx + c \in \mathbb{C}$ polinom

$$\left(x + \frac{a}{3}\right)^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)\left(x + \frac{a}{3}\right) + \left(c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}\right)$$

átalakítás azt mutatja, hogy harmadfokú egyenlet gyökeinek meghatározásához elég az $x^3 + px + q$ alakúakat vizsgálni!

P Küszöböljük ki az x^2-es tagot a $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ polinomból megfelelő helyettesítéssel!

1M Az első két tag alapján $x + 1$ polinomjaként kell felírnunk a megadott polinomot!

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 - 4x - 12 &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 7x - 13 \\ &= (x+1)^3 - 7(x+1) - 6 \\ &= y^3 - 7y - 6 \end{aligned}$$

2M Ezt megoldhatjuk $(x + 1)$-gyel való ismételt maradékos osztással:

	1	3	−4	−12
−1	1	2	−6	**−6**
−1	1	1	**−7**	
−1	1	**0**		
−1	**1**			

Tehát a polinom: $(x + 1)^3 - 7(x + 1) - 6$.

- Keressük az $x^3 + px + q$ gyökeit $x = u + v$ alakban. Mivel $(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$, ezért

$$(u+v)^3 - 3uv(u+v) - u^3 - v^3 = 0.$$

- Ha találunk olyan u, v párt, melyre $p = -3uv$, $q = -u^3 - v^3$, akkor találtunk egy gyököt! Ez u^3-re és v^3-re a következő egyenletrendszer megoldását kívánja:

$$u^3 v^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3 \tag{3}$$

$$u^3 + v^3 = -q \tag{4}$$

- A gyökök és együtthatók összefüggése szerint u^3 és v^3 a $z^2 + qz - (\frac{p}{3})^3$ polinom gyökei, azaz $u^3, v^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}$.

- Már csak e két számból kell köbgyököt vonni:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

  Kérdés, hogy a 3-3 gyök alkotta 9 párból melyek összege lesz valóban gyöke a polinomnak, és megkajuk-e így az összes gyököt?
- A (3) egyenlet helyett az eredeti $uv = -\frac{p}{3}$ összepárosítja u és v lehetséges értékeit, azaz így valóban 3 u, v párt kapunk.
- Ha $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ a harmadik egységgyök, egyszerű behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy ha u és v egy megfelelő pár, azaz $u + v$ gyök, akkor a három gyök:

$$x_1 = u + v$$

$$x_2 = u\varepsilon + v\varepsilon^2 = -\frac{1}{2}(u+v) + \frac{\sqrt{3}}{2}(u-v)i \quad (\text{mert } u\varepsilon v\varepsilon^2 = uv = -\frac{p}{3})$$

$$x_3 = u\varepsilon^2 + v\varepsilon = -\frac{1}{2}(u+v) - \frac{\sqrt{3}}{2}(u-v)i \quad (\text{mert } u\varepsilon^2 v\varepsilon = uv = -\frac{p}{3})$$

- Legyen $D = (\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3$, $u, v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{D}}$
- D>0: A gyökvonások valós gyökvonásokként számolhatók, $u, v \in \mathbb{R}$, így $x_1 \in \mathbb{R}$. Mivel $u \neq v$, azaz $u - v \neq 0$, ezért $x_{2,3} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.
- D=0: $x_1 = 2u = -\sqrt[3]{4q}$, $u = v$, $x_{2,3} = -\frac{1}{2}(u + v) = -u = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$
- D<0: $|u^3| = \sqrt{(\frac{q}{2})^2 - (\frac{q}{2})^2 - (\frac{p}{3})^3}$, azaz $|u| = \sqrt{-\frac{p}{3}}$.

  Másrészt $uv = -\frac{p}{3}$, ezért $v = \bar{u}$.

  Ha $u = a + bi$, akkor $x_1 = 2a$, $x_{2,3} = -a \pm b\sqrt{3}$
- Bizonyítható, hogy a és b meghatározására sajnos nincs csak az alapműveleteket és valós gyökvonásokat tartalmazó általános képlet!
- Általában, az ötöd- vagy annál nagyobb fokú polinomok gyökeinek meghatározására még komplex gyökvonást tartalmazó képlet sincs! (Galois-elmélet)

P $x^3 + 6x^2 + 21x + 52$

M $y = x + 2$

	1	6	21	52
-2	1	4	13	**26**
-2	1	2	**9**	
-2	1	**0**		

$y^3 + 9y + 26$

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{-13 + \sqrt{13^2 + 3^3}} = \sqrt[3]{-13 + 14} = 1$$

$$uv = -\frac{p}{3} = -3 \rightsquigarrow v = -3$$

$$y_1 = u + v = 1 - 3 = -2,$$

$$y_2 = u\varepsilon + v\varepsilon^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - 3\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + 2\sqrt{3}i$$

$$y_3 = 1 - 2\sqrt{3}i.$$

Tehát $x_1 = -4$, $x_{2,3} = -1 \pm 2\sqrt{3}i$,

$$x^3 + 6x^2 + 21x + 52 = (x + 4)(x + 1 + 2\sqrt{3}i)(x + 1 - 2\sqrt{3}i)$$

P $x^3 - 3x + 2$

M $u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{-1 + \sqrt{1^2 + (-1)^3}} = -1$, $v = u$

$x_1 = 2u = -2$, $x_{2,3} = -u = 1$

Tehát $x^3 - 3x + 2 = (x + 2)(x - 1)^2$.

P $x^3 - 6x + 4$

M $u, v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{-2 \pm \sqrt{4 + (-2)^3}} = \sqrt[3]{-2 \pm 2i}$

$u = \sqrt[3]{-2 + 2i} = \{1 + i, (1 + i)\varepsilon, (1 + i)\varepsilon^2\}$

$v = \sqrt[3]{-2 - 2i} = \{1 - i, (1 - i)\varepsilon^2, (1 - i)\varepsilon\}$

$1 + i$ és $1 - i$ valóban összetartozó párok, mert
$(1 + i)(1 - i) = 2 = -\frac{p}{3}$

$x_1 = 2,$
$x_2 = (1 + i)(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) + (1 - i)(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = -1 - \sqrt{3},$
$x_3 = (1 + i)(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) + (1 - i)(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = -1 + \sqrt{3}.$

Tehát $x^3 - 6x + 4 = (x - 2)(x + 1 - \sqrt{3})(x + 1 + \sqrt{3})$.

Tétel (Racionális gyökteszt (Rolle))

Ha egy $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ *polinomnak egy* $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ *szám gyöke, ahol* $(a, b) = 1$, *akkor*

$$a \mid a_0, \;\; b \mid a_n,$$

azaz a számláló a konstans tagnak, a nevező a főegyütthatónak osztója.

B $0 = p(\frac{a}{b}) = a_n(\frac{a}{b})^n + \ldots + a_1(\frac{a}{b}) + a_0 \rightsquigarrow$
$0 = a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} b + \ldots + a_1 a b^{n-1} + a_0 b^n \rightsquigarrow$
$b \mid a_n a^n \rightsquigarrow b \mid a_n$ (mivel $(a, b) = 1$)
$a \mid a_0 b^n \rightsquigarrow a \mid a_0$ (mivel $(a, b) = 1$)

K Ha $p \in \mathbb{Z}[x]$ főegyütthatója 1, akkor p racionális gyökei egész számok, és osztói a konstans tagnak.

M Ez nem garantálja, hogy p-nek vannak racionális gyökei!

P Keressük meg a $2x^4 - 5x^3 - 8x^2 + 17x - 6$ polinom racionális gyökeit!

M A szóba jöhető gyökök: ± 6, ± 3, ± 2, ± 1, $\pm \frac{3}{2}$, $\pm \frac{1}{2}$.

Horner-elrendezéssel próbálkozunk:

	2	−5	−8	17	−6
$\frac{1}{2}$	2	−4	−10	12	0 ✓
1	2	−2	−12	0	✓
~~1~~	~~2~~	~~−4~~	~~−8~~	!!	
3	2	4	0	✓	
−2	2	0	✓		

A !!-es sorban nem találtunk gyököt, a sort töröljük.

$2x^4 - 5x^3 - 8x^2 + 17x - 6 = (2x - 1)(x - 1)(x - 3)(x + 2)$

M A racionális együtthatós polinomokból kiemelhető az együtthatók közös nevezője és a számlálóik legnagyobb közös osztója.

D Amh egy $\mathbb{Z}$ fölötti polinom primitív, ha együtthatóinak legnagyobb közös osztója 1.

T Minden $p \in \mathbb{Q}[x]$ polinom előjeltől eltekintve egyértelműen felírható $p(x) = \frac{a}{b}q(x)$ alakban, ahol $q \in \mathbb{Z}[x]$ primitív, $a, b \in \mathbb{Z}$ és $(a, b) = 1$.

B Az együtthatókat közös nevezőre hozzuk, majd a közös nevezőt (jelölje d) kiemeljük, így egy $p(x) = \frac{1}{d}r(x)$ alakot kapunk, ahol $r(x)$ egészegyütthatós. Ezután a számlálók legnagyobb közös osztóját is kiemeljük: $p(x) = \frac{c}{d}q(x)$. Ha c és d nem lennének relatív prímek, egyszerűsítünk: így kapjuk, hogy $p(x) = \frac{a}{b}q(x)$. q primitív polinom, mivel együtthatóinak legnagyobb közös osztója 1.

T Primitív polinomok szorzata primitív.

B Legyen

$$a(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, b(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j, \text{ és } c(x) = a(x)b(x) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k,$$

azaz $c_0 = a_0 b_0$, $c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \ldots$

Tegyük fel, hogy $\exists p$ prím, hogy $p \mid c_k$ $(k = 0, \ldots, n+m)$, és hogy

$p \mid a_0, \ldots, a_{i-1}$, de $p \nmid a_i$, és

$p \mid b_0, \ldots, b_{j-1}$, de $p \nmid b_j$.

Ekkor

$p \mid c_{i+j} = a_0 b_{i+j} + a_1 b_{i+j-1} + \ldots + a_i b_j + \ldots + a_{i+j-1} b_1 + a_{i+j} b_0$

$\rightsquigarrow p \mid a_i b_j \rightsquigarrow p \mid a_i$ vagy $p \mid b_j$, ellentmondás.

K Mik az egységek $\mathbb{Z}[x]$-ben?

Az 1 és -1 konstans polinomok.

K Mik az irreducibilis polinomok $\mathbb{Z}[x]$-ben?

A prím és ellentettje konstans polinom, valamint a felbonthatatlan primitív polinomok.

P A $2x + 2 \in \mathbb{Z}[x]$ irreducibilis-e?

M $\mathbb{Z}[x]$-ben nem irreducibilis, mert a $2(x + 1)$ felbontásban egyik tényező sem egység! $\mathbb{Q}[x]$-ben irreducibilis!

Lemma (Gauss-lemma)

Legyen $p \in \mathbb{Z}[x]$ primitív nem konstans polinom. p pontosan akkor irreducibilis $\mathbb{Z}[x]$-ben, ha $\mathbb{Q}[x]$-ben.

B ($\Leftarrow$) Ha p felbomlik alacsonyabb fokúak szorzatára $\mathbb{Z}[x]$-ben, akkor ez felbontás $\mathbb{Q}[x]$-ben is. (p irred. $\mathbb{Q}[x]$-ben $\Rightarrow$ irred. $\mathbb{Z}[x]$-ben)
($\Rightarrow$) Legyen $p = p_1 p_2$ a p felbontása alacsonyabb fokúak szorzatára $\mathbb{Q}[x]$-ben. Állítsuk elő p_1-et és p_2-t egy racionális szám és egy primitív polinom szorzataként: $p = \frac{a_1}{b_1}\tilde{p}_1 \frac{a_2}{b_2}\tilde{p}_2$, ahol $\tilde{p}_1$ és $\tilde{p}_2$ primitívek.
Tehát a p primitív polinom egy másik primitív polinom $(\tilde{p}_1\tilde{p}_2)$ racionális számszorosa, azaz $p = \frac{a}{b}\tilde{p}_1\tilde{p}_2$, ahol $(a, b) = 1$.
b nem lehet ± 1-től különböző, különben $\tilde{p}_1\tilde{p}_2$ nem lenne primitív (minden együtthatójának $\frac{a}{b}$-szerese egész, de $(a, b) = 1$, tehát b osztja az együtthatót).
Ezután a sem különbözhet ± 1-től, különben p nem lenne primitív.
Tehát $\frac{a}{b} = 1$ esetén $p = \tilde{p}_1\tilde{p}_2$, vagy $\frac{a}{b} = -1$ esetén $p = (-\tilde{p}_1)\tilde{p}_2$ $\mathbb{Z}[x]$-beli felbontás.

Lemma (2. Gauss-lemma)

Ha $p \in \mathbb{Z}[x]$ felbomlik két alacsonyabb fokú polinom szorzatára $\mathbb{Q}[x]$-ben, akkor felbomlik alacsonyabb fokúak szorzatára $\mathbb{Z}[x]$-ben is.

B Osszuk le p-t együtthatói legnagyobb közös osztójával! Ha $p = p_1 p_2$, akkor $\frac{1}{d}p = (\frac{1}{d}p_1)p_2$, azaz ez is felbomlik $\mathbb{Q}[x]$-ben. Másrészt $\frac{1}{d}p$ primitív, így az előző lemma szerint felbomlik egészegyütthatós primitív polinomok szorzatára. Ezek egyikét megszorozva d-vel, a két polinom szorzata p lesz.

M Konkrétan: ha $p = p_1 p_2$, $p_1, p_2 \in \mathbb{Q}[x]$, akkor van olyan $c \in \mathbb{Q}$ racionális szám, hogy cp_1 és $\frac{1}{c}p_2$ egész együtthatós polinomok, így $p = (cp_1)(\frac{1}{c}p_2)$.

P
$$30x^3 - 26x^2 + 64x - 40 = \left(\frac{5}{2}x - \frac{5}{3}\right)\left(12x^2 - \frac{12}{5}x + 24\right)$$
$$= \frac{5}{6}(3x-2) \cdot \frac{12}{5}(5x^2 - x + 10)$$
$$= (3x-2)(10x^2 - 2x + 20)$$

Tétel (Schönemann–Eisenstein-kritérium)

Ha $a(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$ *nem konstans polinom, és van olyan* $p \in \mathbb{N}^+$ *prímszám, hogy*

1. $p \nmid a_n$,
2. $p \mid a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$,
3. $p^2 \nmid a_0$,

akkor $a(x)$ *irreducibilis* $\mathbb{Q}[x]$*-ben.*

P $x^n - p$ irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$-ben, és mivel primitív, $\mathbb{Z}[x]$-ben is, ha p prímszám. $\rightsquigarrow$ $\mathbb{Q}[x]$-ben van akármilyen nagyfokú irred. pol.

M A tétel csak elégséges feltételt ad az irreducibilitás eldöntésére, a megfordítása nem igaz: pl. $x + 1$ irreducibilis, de nincs megfelelő prím.

M $\mathbb{Z}[x]$-beli irreducibilitás eldöntésére nem alkalmas: a kritériumot $p = 2$-re alkalmazva $3x + 6$ irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$-ben, de $\mathbb{Z}[x]$-ben nem, mert $3(x + 2)$ egy felbontása.

B Indirekt. Tfh $b(x) = \sum b_j x^j$, $c(x) = \sum c_k x^k$ és $a(x) = b(x)c(x)$, azaz $a_0 = b_0 c_0$, $a_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0, \ldots$, és $\deg b < n$, $\deg c < n$.

$p \mid a_0$, $p^2 \nmid a_0 \rightsquigarrow p \mid b_0 c_0$, $p^2 \nmid b_0 c_0 \rightsquigarrow$ pl. $p \mid b_0$, de $p \nmid c_0$

$p \mid a_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0 \rightsquigarrow p \mid b_1$

$\ldots$

$p \mid a_i = b_0 c_i + b_1 c_{i-1} + \ldots + b_{i-1} c_1 + b_i c_0 \rightsquigarrow p \mid b_i$

$b_i = 0$, ha $i > \deg b$,

$p \mid b_0 c_n + b_1 c_{n-1} + \ldots + b_{n-1} c_1 + b_n c_0 = a_n$, de $p \nmid a_n$, ellentmondás, tehát $a(x)$ irreducibilis.

Á Legyen $p \in \mathbb{Q}[x]$. p pontosan akkor irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$ fölött, ha valamely $c \in \mathbb{Q}$ számra $q(x) = p(x + c)$ irreducibilis.

B Ha $p(x) = a(x)b(x)$, akkor $q(x) = p(x + c) = a(x + c)b(x + c)$, ha $q(x) = a(x)b(x)$, akkor $p(x) = q(x - c) = a(x - c)b(x - c)$.

P Igazoljuk, hogy $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ irreducibilis!

M $$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = \frac{x^5 + 1}{x + 1}$$

Legyen $y = x + 1$, ekkor

$$\frac{x^5 + 1}{x + 1} = \frac{(y - 1)^5 + 1}{y} = y^4 - 5y^3 + 10y^2 - 10y + 5,$$

és erre már alkalmazható a S–E-kritérium.

K Adva vannak az $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \in F$ számok, ahol F test, és $x_i \neq x_j$, ha $i \neq j$. Keresünk olyan $p \in F[x]$ polinomot, melyre $p(x_i) = y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

M Ha ilyen p van, akkor ∞ sok van, mert $p(x) + f(x) \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$ is jó, ahol f tetszőleges polinom.

Tétel (Lagrange-interpoláció)

Adva vannak az $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \in F$ *számok, ahol* F *test, és* $x_i \neq x_j$, *ha* $i \neq j$. *Ekkor pontosan egy olyan legfeljebb* $n-1$*-edfokú* $p \in F[x]$ *polinom létezik, melyre* $p(x_i) = y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

B (Létezés) $L_i(x) = \dfrac{(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j, \\ 0, & \text{ha } i \neq j. \end{cases}$$

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i L_i(x)$$

(Egyértelműség) ha $p, q \in F[x]$ két legföljebb $n-1$-edfokú polinom, melyre $p(x_i) = q(x_i)$, azaz $(p-q)(x_i) = 0$ minden $i = 1, 2, \ldots, n$-re.

$p - q$ foka legföljebb $n-1$, gyökeinek száma n, akkor $p - q = 0$, azaz $p = q$.

P

x_k	-1	0	1	2
y_k	-5	5	5	7

M

$$L_1(x) = \frac{(x)(x-1)(x-2)}{(-1)(-1-1)(-1-2)} = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x$$

$$L_2(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)} = \frac{1}{2}x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x + 1$$

$$L_3(x) = \frac{(x+1)(x)(x-2)}{(1+1)(1)(1-2)} = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$$

$$L_4(x) = \frac{(x+1)(x)(x-1)}{(2+1)(2)(2-1)} = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x$$

$$-5L_1 + 5L_2 + 5L_3 + 7L_4 = 2x^3 - 5x^2 + 3x + 5$$

K (Titokmegosztás) Legyen egy széf kódja egy $[0, p-1]$-be eső egész szám, ahol p prím. A feladat az, hogy ezt meg kell osztanunk n ember közt úgy, hogy közülük bármelyik 3 ki tudja nyitni a széfet, de semelyik 2 ne, sőt, összeadva tudásukat, ne tudjanak a kódról többet, mint bárki más.

M Legyen $f \in \mathbb{Z}_p[x]$ egy másodfokú polinom, a széf kódja legyen $f(0)$. A k-adik embernek adjuk oda $f(k)$ értékét $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Bármely 3 ember a három (i, y_i), (j, y_j), (k, y_k) párból egyértelműen fel tudja írni f-et, amiből megkapja $f(0)$-t,

de 2 ember nem tud még a kódról semmit, mert minden $t \in \mathbb{Z}$ értékre pontosan egy legföljebb másodfokú polinom van, melynek grafikonja átmegy az (i, y_i), (j, y_j), $(0, t)$ pontokon.

M A titokmegosztás természetes módon általánosítható úgy, hogy n ember közül bármely k ki tudja számolni a titkot a neki kiosztott adatokból, de semelyik $k-1$ ne tudhasson meg ezekből a titokról többet, mint bárki más.

D Legyen R egy egységelemes, kommutatív gyűrű, és $x_1, x_2, \ldots, x_n$ egymástól különböző szimbólumok. A

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum a_{i_1 i_2 \ldots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}, \quad \text{(ahol } a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \in R, \text{)}$$

alakú kifejezéseket R fölötti n-határozatlanú (n-változós) polinomnak nevezzük. E polinomok halmazát $R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ jelöli.

M A polinomot mindig úgy képzeljük, hogy az összevonható tagok össze is vannak vonva, azaz pl. $2x_1^3x_2^2 - 5x_1^3x_2^2$ helyett $-3x_1^3x_2^2$ szerepel.

P $3x_1^3x_3 - x_2^2x_1^2 + 5x_2x_3 - 2x_3 \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$

M E fogalom rekurzív módon is definiálható, azaz $R[x_1, x_2]$ nem más, mint az $R[x_1]$ gyűrű fölötti polinomgyűrű, azaz $R[x_1, x_2] = (R[x_1])[x_2]$. Általában $R[x_1, x_2, \ldots, x_n] = (R[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}])[x_n]$.

P $x^3y^2 + 3x^2y^2 - xy^3 + xy^2 + 2xy - y^2 + 7 \in \mathbb{Z}[x, y]$,
$(-x)y^3 + (x^3 + 3x^2 + x - 1)y^2 + (2x)y + 7 \in (\mathbb{Z}[x])[y]$

T Az $R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ egységelemes, kommutatív gyűrű. Ha R nullosztómentes, akkor $R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ is, és $R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ egységei azok a konstans polinomok, ahol a konstans R-ben is egység.

D Az $ax_1^{i_1}x_2^{i_2}\dots x_n^{i_n}$ $(a \in R \setminus \{0\})$ tag foka $i_1 + i_2 + \dots + i_n$. A $p \in R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ polinom foka a p tagjai fokának maximuma.

D A p polinom tagjainak lexikografikus rendezésén tagjainak olyan sorrendbe való írását értjük, melyben

- $x_1 \succ x_2 \succ \dots \succ x_n$
- $ax_1^{i_1}x_2^{i_2}\dots x_n^{i_n} \succ bx_1^{j_1}x_2^{j_2}\dots x_n^{j_n}$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$, ha valamilyen $k = 1, 2, \dots n$ indexre $i_k > j_k$, de minden $m < k$ indexre $i_m = j_m$.

P $x_1x_2^3x_3^2 \succ x_1x_2^2x_3$, $x_1^2x_2^5x_3 \succ x_2^5x_3$, $x_1x_2 \succ x_1x_3^3$

P Rendezzük lexikografikusan az $x_2^8x_3 - 7x_1^2x_3^7 + 3x_1^2x_3 + x_1^3x_2^2x_3 + 2x_1^3x_2^2 - 5x_1$ polinom tagjait!

M $x_1^3x_2^2x_3 + 2x_1^3x_2^2 - 7x_1^2x_3^7 + 3x_1^2x_3 - 5x_1 + x_2^8x_3$

D A $p \in R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ polinomot szimmetrikus polinomnak nevezzük, ha bármely két változóját kicserélve a polinom nem változik, azaz tetszőleges i, j index esetén

$$p(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = p(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n).$$

P Az $x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 - 7x_1x_2x_3$ polinom szimmetrikus, de a $x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + x_1x_3^2 - 7x_1x_2x_3$ polinom nem!

Á Egy p polinom pontosan akkor szimmetrikus, ha változóinak tetszőleges permutációja mellett sem változik, azaz ha $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ egy tetszőleges permutáció, akkor

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

B Minden permutáció előállítható elemcserék egymás után való elvégzésével.

D A változók összes k-tényezős szorzatának összegeként kapott $e_k \in R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ polinomot *k-adik elemi szimmetrikus polinomnak* nevezzük, azaz

$$e_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}, \qquad \textit{speciálisan}$$

$$e_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1,$$

$$e_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i,$$

$$e_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j,$$

$$\ldots$$

$$e_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 x_2 \ldots x_n$$

P $e_0(x) = 1$, $e_1(x) = x$, $e_0(x, y) = 1$, $e_1(x, y) = x + y$, $e_2(x, y) = xy$, $e_0(x, y, z) = 1$, $e_1(x, y, z) = x + y + z$, $e_2(x, y, z) = xy + xz + yz$, $e_3(x, y, z) = xyz$.

Tétel (Szimmetrikus polinomok alaptétele)

Tekintsük az F test fölötti $F[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ polinomgyűrűt. Minden szimmetrikus $p \in F[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ polinom felírható az elemi szimmetrikus polinomok F fölötti polinomjaként, azaz létezik olyan $f \in F[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ polinom, hogy

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(e_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, e_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)).$$

B A lexikografikus rendezés szerinti indukcióval bizonyítunk. Konstans polinomra az állítás igaz.

- Az

  $$e_1^{k_1} \ldots e_n^{k_n} = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^{k_1} (x_1x_2 + \ldots + x_{n-1}x_n)^{k_2} \ldots (x_1x_2 \ldots x_n)^{k_n}$$

  polinom főtagja $x_1^{k_1+k_2+\ldots+k_n} x_2^{k_2+\ldots+k_n} \ldots x_n^{k_n}$.
- Másrészt ha a szimmetrikus p polinom főtagja $ax_1^{i_1}x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$, akkor $i_1 \geqslant i_2 \geqslant \cdots \geqslant i_n$ (miért?).

- Így a következő egyenletrendszer megoldható a nemnegatív egészek körében (a megoldást az utolsó egyenlettel kezdjük):

$$\left.\begin{aligned} k_1 + k_2 + \ldots + k_n &= i_1 \\ k_2 + \ldots + k_n &= i_2 \\ &\ldots \\ k_{n-1} + k_n &= i_{n-1} \\ k_n &= i_n \end{aligned}\right\} \rightsquigarrow \begin{aligned} k_1 &= i_1 - i_2 \\ k_2 &= i_2 - i_3 \\ &\ldots \\ k_{n-1} &= i_{n-1} - i_n \\ k_n &= i_n \end{aligned}$$

- Így $p(x)$ és $ae_1^{k_1} \ldots e_n^{k_n}$ főtagja azonos, tehát a $p(x) - ae_1^{k_1} \ldots e_n^{k_n}$ polinom főtagja a lexikografikus rendezés szerint kisebb, mint p főtagja, így az indukciós feltevés szerint e polinom már elemi szimmetrikus polinomok polinomja, s ezzel p is.
- A bizonyítás konstruktív volt, az alkalmazott „főtag kiküszöbölési eljárás" a gyakorlatban is használható.

P Legyen $p(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Állítsuk elő elemi polinomok polinomjaként.

M A lexikografikus rendezésben legyen $x \succ y \succ z$. A főtag $x^2y^0z^0$, tehát $i_1 = 2$, $i_2 = 0$, $i_3 = 0$.

Innen $k_1 = 2$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$, azaz $p_1(x, y, z) =$
$p(x, y, z) - (x + y + z)^2 = -2xy - 2xz - 2yz = -2(xy + xz + yz)$
$p(x, y, z) = (x+y+z)^2 - 2(xy+xz+yz) = e_1(x, y, z)^2 - 2e_2(x, y, z)$.

P Legyen $p(x,y) = x^5 + 2x^4y + 3x^3y^2 + 3x^2y^3 + 2xy^4 + y^5$. Állítsuk elő elemi polinomok polinomjaként.

- A főtag x^5, $i_1 = 5$, $i_2 = 0 \rightsquigarrow$ $k_1 = 5$, $k_2 = 0 \rightsquigarrow$
- $$\begin{aligned} p_1(x,y) &= p(x,y) - (x+y)^5 \\ &= x^5 + 2x^4y + 3x^3y^2 + 3x^2y^3 + 2xy^4 + y^5 \\ &\quad - (x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5) \\ &= -3x^4y - 7x^3y^2 - 7x^2y^3 - 3xy^4 \end{aligned}$$
- A főtag $-3x^4y$, $i_1 = 4$, $i_2 = 1 \rightsquigarrow$ $k_1 = 3$, $k_2 = 1$, $\rightsquigarrow$
- $$\begin{aligned} p_2(x,y) &= p_1(x,y) + 3(x+y)^3(xy) \\ &= -3x^4y - 7x^3y^2 - 7x^2y^3 - 3xy^4 \\ &\quad + 3(x^4y + 3x^3y^2 + 3x^2y^3 + xy^4) \\ &= 2x^3y^2 + 2x^2y^3 = 2(x+y)(xy)^2 \end{aligned}$$
- $p = e_1^5 + p_1 = e_1^5 - 3e_1^3e_2 + p_2 = e_1^5 - 3e_1^3e_2 + 2e_1e_2^2$, tehát $p = e_1^5 - 3e_1^3e_2 + 2e_1e_2^2$.