Bevezetés az algebrába – komplex számok

Wettl Ferenc
Algebra Tanszék

BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

2015. december 6.

1 A komplex számok rövid története

2 Számolás komplex számokkal

3 Az algebra alaptétele

4 Binomiális tétel, kombinatorikai alapfeladatok

- pozitív egészek – összeadás, szorzás
- $a + x = b$ megoldhatósága $\to$ negatív számok és 0
- $ax = b$ megoldhatósága $\to$ racionális számok
- $x^2 = 2$ megoldása $\to$ vannak nem racionális számok is
- sorozatok határértékének fogalma $\to$ irracionális számok
- racionális $+$ irracionális számok $\to$ valós számok
- és mi van az $x^2 = -1$ egyenlet megoldhatóságával? Szükség van további bővítésre?

D Egy F testről azt mondjuk, hogy algebrailag zárt, ha bármely nem konstans F-beli együtthatós polinomnak van F-ben zérushelye.

P $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{R}$ tehát nem zárt, mert $x^2 + 1$-nek nincs zérushelye e testekben, de nem zárt pl. $\mathbb{Z}_5$ sem, mert az $x^2 + 2$ polinomnak $\mathbb{Z}_5$-ben nincs zérushelye.

T Ernst Steinitz, 1910) Minden F test beágyazható algebrailag zárt testbe, melyek közt létezik legszűkebb, ami F-et fixenhagyó izomorfia erejéig egyértelmű.

- Girolamo Cardano (1501–1576) orvos, filozófus, matematikus – 1538 körül értesül arról, hogy Scipione del Ferro és Niccolò Tartaglia egymástól függetlenül felfedezték az $x^3 + px = q$ alakú harmadfokú egyenlet megoldását – 1545-ben megírja „Ars magna sive de regulis algebraicis" című művét, benne a megoldóképlettel – 1552-től kezdődően Európa egyik leghíresebb orvosa – a 60-as évek elején elveszti két fiát (gyilkosságért halál, rablásért száműzetés) – 1570-ben Bolognában bebörtönzik, szabadulása után Rómába költözik
- Scipione del Ferro (1465–1526) felfedezi a harmadfokú egyenlet megoldásának módját – titokban tartja (kivétel Nave, Fiore)
- Niccolò Fontana (1500?–1557) gúnynevén Tartaglia (dadogó) (1511 Brescia, francia dúlás) – 1535: Fiore kihívja Tartagliát egy 15 napos versenyre (30 feladat, a vesztes a győztest és 29 barátját megvendégeli) – felkészüléskor Tartaglia rájön a nehezebb típusú harmadfokú egyenletek megoldásának módjára

- Cardano (kilátásba helyezve Tartaglia tüzérségi találmányainak pártfogót keres, titoktartás igérete mellett megszerzi a titkot) – amikor Navétól megtudja, hogy del Ferro is ismerte e képleteket, felmentve érzi magát, és publikálja (a negyedfokú esetre is továbbfejlesztve az eredményt)
- Tartaglia leírta „megcsalatásának” történetét
- Milánóban Ferrari (Cardano tanítványa) vitára hívja Tartagliát, aki a vitát elveszti, ennek következtében lehetőségeit (nyilvános előadások) elveszíti

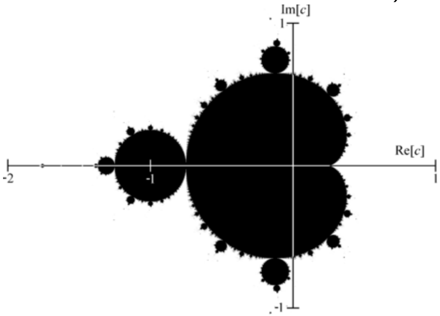
Oldjuk meg az $x^3 = bx + c$ egyenletet!
A Tartaglia által talált képlet (ennél később precízebb formában fogjuk tanulni):

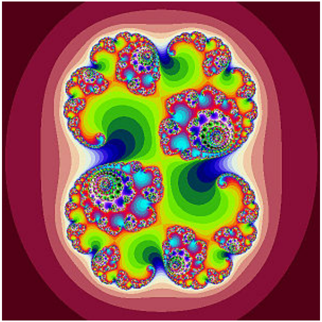
$$x = \sqrt[3]{\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{c}{2} - \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3}}$$

Oldjuk meg a $x^3 = 7x + 6$ egyenletet!

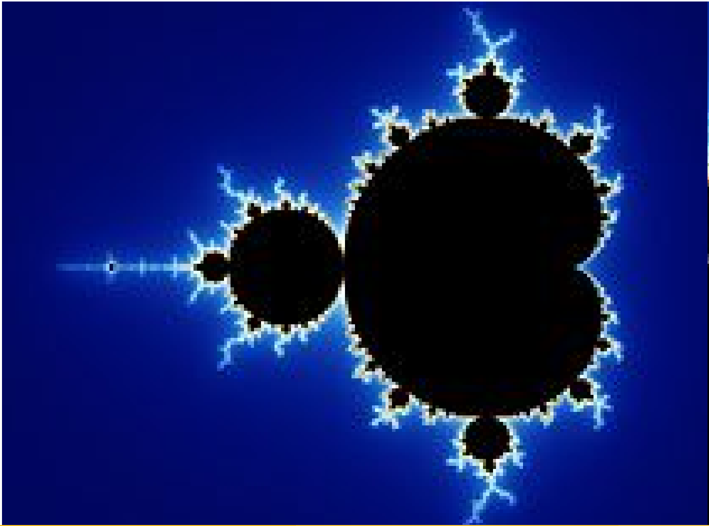
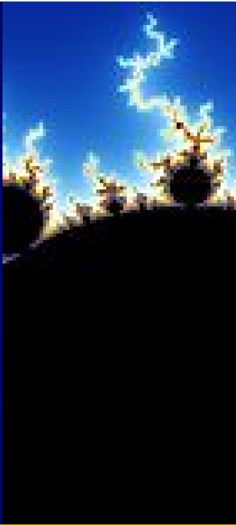
$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{\frac{6}{2} + \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{6}{2} - \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{3}\right)^3}} \\ &= \frac{1}{3}\sqrt[3]{81 + 30\sqrt{-3}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{81 - 30\sqrt{-3}} \\ &= \frac{1}{3}\left(9/2 + 1/2\sqrt{-3}\right) + \frac{1}{3}\left(9/2 - 1/2\sqrt{-3}\right) \\ &= 3 \end{aligned}$$

- hidrodinamika, áramlások vizsgálata, Zsukov-féle szárnyprofil
- elektromosságtan, jelfeldolgozás, villamosmérnöki tudományok
- lineáris rendszerek, lineáris differenciálegyenletek megoldása
- relativitáselmélet, kvantummechanika
- fraktálok (Mandelbrot-halmazok: ahol a $z_0 = c$, $z_n = z_{n-1}^2 + c$ sorozat korlátos; Julia-halmazok)





Mandelbrot halmaz

1 A komplex számok rövid története

2 Számolás komplex számokkal

3 Az algebra alaptétele

4 Binomiális tétel, kombinatorikai alapfeladatok

jelölés

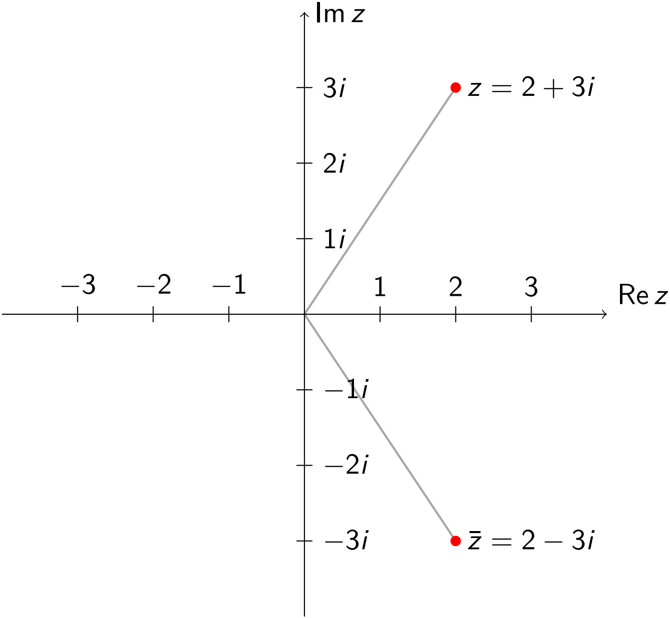
$i = \sqrt{-1}$ imaginárius egység (imaginárius = nem valódi)

Definíció (komplex szám algebrai alakja)

Az $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ alakú kifejezéseket komplex számoknak nevezzük, ahol i az a szám, melyre $i^2 = -1$. A komplex számok halmazát $\mathbb{C}$ jelöli.
Egy komplex szám több alakba is felírható, ezt az alakot algebrai alaknak nevezzük. Az a szám a z valós része, a b az imaginárius, jelölése:
$a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$ (más szokásos jelölés: $a = \Re(z)$, $b = \Im(z)$).

Definíció (konjugált)

$\bar{z} = a - ib$, ahol $z = a + ib$



Im z
$3i$
$2i$
$1i$
$-1i$
$-2i$
$-3i$
-3
-2
-1
1
2
3
Re z
$z = 2 + 3i$
$\bar{z} = 2 - 3i$

Definíció

Az (a, b) vektor x-tengellyel bezárt szöge legyen φ, hossza r. Ekkor a $z = a + ib$ komplex szám felírható $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ alakban is, hisz $a = r\cos\varphi$, és $b = r\sin\varphi$. Ezt az alakot trigonometriai alaknak, az r nemnegatív valóst a komplex szám abszolút értékének, φ-t irányszögének, arkuszának vagy argumentumának nevezzük: $r = |z|$, $\varphi = \arg z$.

Tétel

A komplex számok algebrai alakja egyértelmű.

Bizonyítás.

$a + bi = c + di \rightsquigarrow a - c = (d - b)i$.

$b \neq d \rightsquigarrow \frac{a-c}{d-b} = i$ ellentmondás;

$b = d \rightsquigarrow a - c = 0 \rightsquigarrow a = c$. $\square$

Tétel (Kapcsolat az algebrai és trigonometriai alak közt)

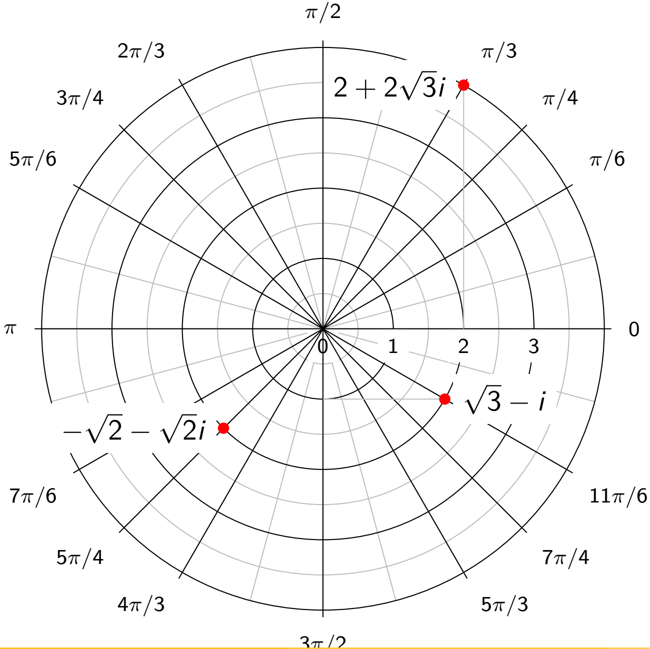
Ha $z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, *akkor*

$$a = r\cos\varphi$$

$$b = r\sin\varphi$$

$$r = |z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z\bar{z}}, (\textit{ugyanis } z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2)$$

$$\varphi = \arg(z) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(\frac{b}{a}) & \textit{ha } a > 0 \\ \operatorname{arctg}(\frac{b}{a}) + \pi & \textit{ha } a < 0 \textit{ és } b \geq 0 \\ \operatorname{arctg}(\frac{b}{a}) - \pi & \textit{ha } a < 0 \textit{ és } b < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \textit{ha } a = 0 \textit{ és } b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \textit{ha } a = 0 \textit{ és } b < 0 \\ \textit{határozatlan} & \textit{ha } a = 0 \textit{ és } b = 0 \end{cases} \qquad \textit{ahol } \varphi \in (-\pi, \pi].$$


$\pi/2$
$2\pi/3$
$\pi/3$
$3\pi/4$
$\pi/4$
$5\pi/6$
$\pi/6$
π
0
$7\pi/6$
$11\pi/6$
$5\pi/4$
$7\pi/4$
$4\pi/3$
$5\pi/3$
$3\pi/2$
0
1
2
3
$2+2\sqrt{3}i$
$\sqrt{3}-i$
$-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

Példa

$$(2+3i)-(3-i) = \; -1+4i$$

$$(2+3i)(3-i) = 2\cdot 3 + 3i(-i) + (3i)\cdot 3 + 2\cdot(-i) = 9+7i$$

$$\frac{1}{i} = \; -i$$

$$\frac{2+3i}{3+i} = \frac{(2+3i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{9+7i}{10} = \frac{9}{10} + \frac{7}{10}i$$

Példa (Alapműveletek algebrai alakkal)

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$
$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$
$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$
$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Alapműveletek algebrai alakban: összeadás, kivonás, szorzás algebrai kifejezésként az $i^2=-1$ helyettesítést használva; osztás a nevező konjugáltjával való bővítéssel.

Tétel

$\mathbb{C}$ test (azaz $\mathbb{C}$ zárt az összeadás és szorzás műveletére, mindkét művelet kommutatív és asszociatív, az összeadás invertálható, a szorzás invertálható a $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ halmazon, a szorzás disztributív az összeadásra nézve).

Tétel (Konjugált tulajdonságai)

1. $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$
2. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$
3. $\overline{z_1 / z_2} = \bar{z}_1 / \bar{z}_2$
4. $\bar{\bar{z}} = z$

Példa

$[2(cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})][\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}] =$
$2cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{7\pi}{6} - 2\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{7\pi}{6} + 2[cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{7\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{7\pi}{6}]i =$
$2\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{7\pi}{6}) + 2\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{7\pi}{6})i = 2\cos\frac{3\pi}{2} + 2\sin\frac{3\pi}{2}i = -2i.$

Ellenőrzés: $(1 + \sqrt{3}i)(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i^2 - \frac{i}{2} - \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}i = -2i.$

Állítás (Szorzás, osztás trigonometriai alakban)

Legyen $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. *Ekkor*

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Bizonyítás.

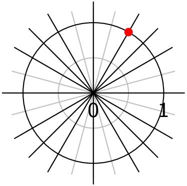
A szögek összegére vonatkozó trigonometriai azonosságokkal:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\ &= r_1 r_2\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\right) \\ &= r_1 r_2\left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right) \end{aligned}$$

Az osztásra hasonlóan. □

Tétel (Abszolút érték tulajdonságai)

1. $|\bar{z}| = |z|$
2. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
3. $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$
4. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ *(háromszög-egyenlőtlenség)*



Példa

Számítsuk ki

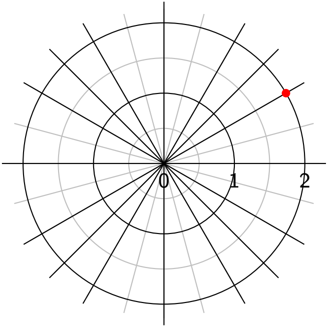
$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{100}$$

értékét!

Megoldás.

$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ trigonometriai alakja: $\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$.

$[\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}]^{100}=\cos\frac{100\pi}{3}+i\sin\frac{100\pi}{3}=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$ □



Példa

Számítsuk ki

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^9$$

értékét!

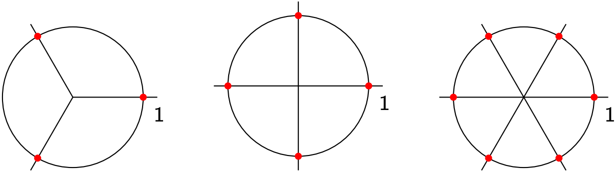
Megoldás.

$\sqrt{3}+i$ hossza $\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=2$, trigonometriai alakja: $2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$.
$[2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})]^9=2^9(\cos\frac{9\pi}{6}+i\sin\frac{9\pi}{6})=512(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2})=$
$-512i$ □

Definíció

Az 1 n-edik gyökeit n-edik **egységgyököknek** nevezzük.

Az 1 négyzetgyökei a komplexek körében: 1 és -1.
Az 1 harmadik gyökei: $1,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.
Az 1 negyedik gyökei: $1,\ i,\ -1,\ -i$.
Az 1 hatodik gyökei: $1,\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -1,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.



Példa

Számítsuk ki a hatodik egységgyököket!

Megoldás.

Az 1 trigonometriai alakja $1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$. Olyan számokat keresünk, melyek 6-odik hatványa 1, azaz olyanokat, melyekre $r^6(\cos 6\varphi + i \sin 6\varphi) = 1(\cos 0 + i \sin 0)$. Innen $r = 1$, és $6\varphi = 0$, de mivel 0 ugyanaz a szög, mint 2π, $4\pi \ldots$, ezért $6\varphi = 2\pi$, $6\varphi = 4\pi$, $6\varphi = 6\pi$, $6\varphi = 8\pi$, $6\varphi = 10\pi$ is lehet! Innen $\varphi = 0, \pi/3, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3, 5\pi/3$. A gyökök tehát:

$1(\cos 0 + i \sin 0) = 1$,

$1(\cos \pi/3 + i \sin \pi/3) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$,

$1(\cos 2\pi/3 + i \sin 2\pi/3) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$,

$1(\cos \pi + i \sin \pi) = -1$,

$1(\cos 4\pi/3 + i \sin 4\pi/3) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$,

$1(\cos 5\pi/3 + i \sin 5\pi/3) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$. □

Definíció (Komplex n-edik gyökvonás)

Ha $z \in \mathbb{C}$ és $n \in \mathbb{N}^+$, akkor $\sqrt[n]{z} = \{w \in \mathbb{C} : w^n = z\}$, azaz a z komplex szám komplex n-edik gyökén azon w számok halmazát értjük, melyekre $w^n = z$. (Ez különbözik a valós n-edik gyök fogalmától!)

Állítás (Hatványozás, gyökvonás trigonometriai alakban)

Legyen $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Ekkor

$$z^{-1} = r^{-1}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) = r^{-1}(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}^+,\ k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

ahol $\sqrt[n]{\ }$ a komplex, $\sqrt[n]{\ }$ a valós n-edik gyökvonás művelete, és k végigfuthat bármely más mod n teljes maradékrendszer minden elemén.

Példa (Gyökvonás egységgyökkel való szorzással)

$\sqrt[5]{1+i\sqrt{3}}$

Megoldás.

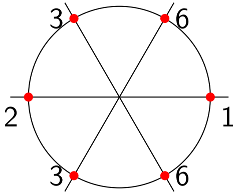
$z = 1 + i\sqrt{3} = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$ $(|z| = 2,\ \arg(z) = \frac{\pi}{3}$.
Az összes gyök meghatározásához elegendő egy gyök kiszámítása, és annak megszorzása az 5-ödik egységgyökökkel (miért?).
Egy gyök: $\sqrt[5]{2}(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15})$
Az összes gyök: $\sqrt[5]{2}(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15})(\cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5})$, ahol $k = 0, 1, \ldots, 4$.
Azaz $\sqrt[5]{2}(\cos(\frac{\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5}) + i\sin(\frac{\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5})$, $k = 0, 1, \ldots, 4$. □

Definíció (Primitív n-edik egységgyök)

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{C}$ és $n \in \mathbb{N}^+$. Azt mondjuk, hogy ε **primitív *n*-edik egységgyök**, ha $\varepsilon^n = 1$, de nincs olyan $0 < k < n$, hogy $\varepsilon^k = 1$.

Példa

Válasszuk ki a 6-odik egységgyökök közül a primitíveket!



Tétel

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{C}$ egy primitív n-edik egységgyök ($n \in \mathbb{N}^+$) és legyen $k \in \mathbb{Z}$. ε^k pontosan akkor lesz primitív n-edik egységgyök, ha $(k, n) = 1$.

Bizonyítás.

Tegyük fel, hogy valamely $m \in \mathbb{N}^+$ egészre $(\varepsilon^k)^m = \varepsilon^{km} = 1$. Ekkor, mivel ε primitív n-edik egységgyök, $n \mid km$, ugyanis ha nem volna, akkor maradékosan osztva n-nel kapjuk, hogy $km = nq + r$, ahol $0 < r < n$. Ekkor viszont $1 = \varepsilon^{km} = \varepsilon^{nq} \cdot \varepsilon^r = \varepsilon^r$, ami ellentmond annak, hogy ε primitív n-edik egységgyök.
Ha $(k, n) = 1$, akkor $n \mid m$, tehát ε^k primitív n-edik egységgyök.
Ha $(k, n) = d > 1$, akkor $(\varepsilon^k)^{n/d} = (\varepsilon^n)^{k/d} = 1$, ami $\frac{n}{d} < n$ miatt azt jelenti, hogy ε^k nem primitív n-edik egységgyök. $\square$

Következmény

A primitív n-edik egységgyökök száma $\varphi(n)$.

Tétel

Egy ε egységgyök pontosan akkor primitív n-edik egységgyök, ha hatványaiként minden n-edik egységgyök megkapható.

Tétel

Az n-edik egységgyökök összege 0, szorzata $(-1)^{n+1}$.

1 A komplex számok rövid története

2 Számolás komplex számokkal

3 Az algebra alaptétele

4 Binomiális tétel, kombinatorikai alapfeladatok

Tétel (Algebra alaptétele)

Minden komplex-együtthatós n-edfokú ($n \geq 1$) *polinomnak van komplex gyöke.*

Tétel (Algebra alaptétele – változat)

$\mathbb{C}$ *algebrailag zárt test.*

Tétel (Algebra alaptétele – változat)

Minden komplex-együtthatós n-edfokú ($n \geq 1$) polinomnak – a gyököket multiplicitással számolva – pontosan n gyöke van. Azaz minden komplex-együtthatós polinom lineáris tényezők szorzatára bontható: az

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,\ a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$$

egyenlethez léteznek olyan $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ számok, hogy

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n (x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_n),$$

és ez a felbontás a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

Állítás

Minden $a, b, c \in \mathbb{C}$ $(a \neq 0)$ *esetén az* $az^2 + bz + c$ *polinom* $a(z - z_1)(z - z_2)$ *alakra hozható, ahol (a komplex gyökvonás jelével)*

$$z_{1,2} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}
&(z - z_1)(z - z_2)\\
&= a\left(z - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(z - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\\
&= a\left(z^2 - z\left(\frac{-b + \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}\right) + \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}\right)\\
&= a\left(z^2 - z\frac{-2b}{2a} + \frac{-4ac}{4a^2}\right) = az^2 + bz + c
\end{aligned}$$

$\square$

1 A komplex számok rövid története

2 Számolás komplex számokkal

3 Az algebra alaptétele

4 Binomiális tétel, kombinatorikai alapfeladatok

Definíció (Binomiális együttható)

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad n, k \in \mathbb{N}_0,\ k \leqslant n.$$

- $k! = 1\cdot 2\cdot (k-1)\cdot k$, $0! = 1$
- A $\dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot k}$ képlet értelmezhető valós n esetén is:
- $\dbinom{\frac{1}{2}}{3} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{3}{2})}{1\cdot 2\cdot 3} = \dfrac{1}{16}$

Állítás (A binomiális együttható alaptulajdonságai)

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

1. bizonyítás.

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots k} + \frac{n(n-1)\dots(n-k)}{1\cdot 2\cdot 3\dots(k+1)} =$$

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)[(k+1)+(n-k)]}{1\cdot 2\cdot 3\dots(k+1)} = \frac{(n+1)n\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots(k+1)}$$

$\square$

Pascal-háromszög

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

Tétel (Binomiális tétel)

Tetszőleges valós vagy komplex a és b számokra és $n \in \mathbb{N}_0$ természetes számra

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

- Mivel a bizonyítás csak az a és b közti összeadás és szorzás műveleti tulajdonságait használja, ezért a tétel bármely egységelemes kommutatív gyűrű a és b elemére is igaz.
- Speciálisan $a = 1$, $b = x$ helyettesítéssel:

$$(1+x)^n = \binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x^1 + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

P $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

P $0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$

P $(1+i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i$

P $(1+i)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} i - \binom{n}{2} - \binom{n}{3} i + \dots$

Másrészt $(1+i)^n = (\sqrt{2})^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right)$

A két eredmény összehasonlításából:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots = (\sqrt{2})^n \cos \frac{n\pi}{4}$$

$$\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \dots = (\sqrt{2})^n \sin \frac{n\pi}{4}$$

1. Bizonyítás: teljes indukcióval.

$n = 0$: $1 = 1$ ✓

$n \to n + 1$:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\Big)(a+b) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\
&= \binom{n}{0} a^{n+1} + \binom{n}{1} a^n b + \ldots + \binom{n}{n} ab^n \\
&\qquad + \binom{n}{0} a^n b + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^n + \binom{n}{n} b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n b + \ldots + \binom{n+1}{n} ab^n + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1}
\end{aligned}
$$

$\square$

2. Bizonyítás a binomiális együtthatók additív tulajdonságára.

$n+1$ elem közül megjelölünk egyet. Hányféleképp választhatunk ki közülük $k+1$-et.

Egyrészt $\binom{n+1}{k+1}$.

Másrészt $\binom{n}{k}$-féleképp úgy, hogy köztük van a megjelölt elem, és $\binom{n}{k+1}$-féleképp úgy, hogy nincs köztük!

Tehát $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$. □

2. Bizonyítás a binomiális tételre – kombinatorikai leszámlálással.

Számítsuk ki, hogy az $(a+b)(a+b)\dots(a+b)$ szorzatban mi $a^{n-k}b^k$ együtthatója.

Hányféleképp választható ki az n darab $(a+b)$ tényezőből k darab b és $n-k$ darab a?

Összesen $\binom{n}{k}$.

□