Bevezetés az algebrába – az egész számok 2

Wettl Ferenc
Algebra Tanszék

BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

2015. december 6.

Definíció

Az 1-nél nagyobb p természetes számot felbonthatatlan számnak nevezzük, ha $p = ab$ $(a, b \in \mathbb{N}^+)$ esetén a vagy b egyenlő eggyel.

- A 100 alattiak: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. (OEIS A000040)
- A felbonthatatlan szám fogalma az egészek körében is definiálható: az egységtől különböző p egészt felbonthatatlan számnak nevezzük, ha $p = ab$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ esetén a vagy b egység (. . . , -5, -3, -2, 2, 3, 5,. . .).
- Az 1-nél nagyobb nem felbonthatatlan számokat összetett számoknak nevezzük. Az első néhány összetett szám 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14,. . . .

T Minden 1-nél nagyobb egésznek van felbonthatatlan osztója.

B Indirekt: t.f.h van olyan 1-nél nagyobb egész, melynek nincs felbonthatatlan osztója. Legyen n a legkisebb ilyen egész.
$n \mid n$, tehát n nem felbonthatatlan $\rightsquigarrow$ $n = ab$, ahol $1 < a < n$ $\rightsquigarrow$ a-nak az indirekt feltevés szerint már van felbonthatatlan osztója, de az osztja n-et is, ellentmondás.

Definíció

Az 1-nél nagyobb p természetes számot prímszámnak nevezzük, ha $p \mid ab$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ esetén $p \mid a$ vagy $p \mid b$.

- Az egészek körében az egységtől és nullától különböző p egészt prímszámnak nevezzük, ha $p \mid ab$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ esetén $p \mid a$ vagy $p \mid b$.
- Míg a felbonthatatlanok definíciójából a 0-t nem kell kizárni $(0 = 0 \cdot 2)$, a prímekéből igen $(0 \mid ab \rightsquigarrow ab = 0 \rightsquigarrow 0 \mid a$ vagy $0 \mid b)$.

Tétel (F 1.4.3)

p pontosan akkor prím, ha felbonthatatlan.

B (prím $\Rightarrow$ felbonthatatlan) $p = ab \rightsquigarrow p \mid ab$, de p prím, így $p \mid a$ vagy $p \mid b$, azaz $ab \mid a$ vagy $ab \mid b \rightsquigarrow b = 1$ vagy $a = 1$, tehát p felbonthatatlan.

(felbonthatatlan $\Rightarrow$ prím) $p \mid ab$ és $p \nmid a$ és p felbonthatatlan $\rightsquigarrow$ $(p, a) \mid p$ miatt $(p, a) = 1 \rightsquigarrow p \mid b$.

- A törzsszám, prímszám, felbonthatatlan szám kifejezéseket azonos értelemben használjuk.
- Egy bizonyítás a KÖNYV-ből:

Tétel (Euklidész)

A prímszámok száma végtelen.

Bizonyítás.

Indirekt: tegyük fel, hogy csak véges sok prím létezik: p_1, p_2,..., p_n. Tekintsük a $q = p_1 p_2 \dots p_n + 1$ számot. q-nak van prímosztója, de az nem egyezik meg a p_1, p_2,..., p_n egyikével sem, ellentmondás. □

Algoritmus (Eratoszthenészi szita)

- *Bemenet:* $[2, 3, \ldots, n]$ *egészek listája,*
- *Kimenet: az n-nél nem nagyobb prímek listája*

1 $N \leftarrow [2, 3, \ldots, n]$, $i \leftarrow 1$
2 $p \leftarrow N[i]$
3 *ha* $p > \sqrt{n}$, *akkor menj 6-ra*
4 $N[j-1] \leftarrow 0$, *ahol* $j \leftarrow 2p, 3p, \ldots$ *(p többszöröseinek kinullázása)*
5 *növeld i-t addig, míg* $N[i] > 0$ *nem lesz és menj 2-re*
6 *N pozitív elemeinek kiírása*

T Ha $n \in \mathbb{N}^+$ összetett szám, akkor van $\sqrt{n}$-nél nem nagyobb prímtényezője.

B $n = ab$, $1 < a \leqslant b < n \rightsquigarrow a \leqslant \sqrt{n}$.

- Eratoszthenészi szita animáció

- Dirichlet tétel: ha a és b relatív prímek, akkor az $an + b$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) sorozatban végtelen sok prímszám van.
- Ben Green, Terrence Tao, 2006: létezik tetszőlegesen hosszú, csak prímekből álló számtani sorozat. (néhány példa: 2,3 – 3,5,7 – 5,11,17,23,29 – 7,37,67,97,127,157 – 199,409,619,829,1039,1249,1459,1669,1879,2089)
- Prímszámtétel (Hadamard, de la Valleé-Poussin, 1896; elemi bizonyítás Selberg, Erdős, 1949) Az x-nél kisebb prímek $\pi(x)$ száma aszimptotikusan $x/\ln x$ ($\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} = 1$)

Tétel (A számelmélet alaptétele)

Minden 1-nél nagyobb természetes előáll véges sok felbonthatatlan szám szorzataként, és e felbontás a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

- A tétel kiterjeszthető az 1-re is, mint ami a prímek üres szorzatához rendelhető.
- A „tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű” helyett mondhatjuk azt is, hogy a felbontás egyértelmű a prímek monoton növekvő rendezése mellett. Az azonos prímek szorzatát hatvánnyal jelölve az 1-nél nagyobb egészek kanonikus alakjához jutunk: $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$. Pl. $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.
- A tétel kiterjeszthető az egészeken értelmezett prímfogalommal az egészek halmazára is: minden 0-tól és egységtől különböző egész szám egységszeresektől és a sorrendtől eltekintve egyértelműen előáll felbonthatatlanok szorzataként.
  (pl. $-6 = (-2) \cdot 3 = 2 \cdot (-3) = 3 \cdot (-2) = (-3) \cdot 2$)
- Hasonló tétel nem igaz pl. a pozitív páros számok körében:
  $60 = 2 \cdot 30 = 6 \cdot 10$

Bizonyítás.

(A felbonthatóság bizonyítása) Indirekt: tegyük fel, hogy van olyan természetes szám, mely nem bontható fel. Legyen n közülük a legkisebb. n nem lehet felbonthatatlan, mert akkor az egyelemű szorzat a felbontás, tehát $n = ab$, ahol viszont a és b már felbonthatók, így a szorzatuk is. Ellentmondás.
(Az egyértelműség bizonyítása) Indirekt: tegyük fel, hogy van olyan természetes szám, mely nem bontható fel egyértelműen. Legyen n közülük a legkisebb.

$$n = p_1 p_2 \dots p_r = q_1 q_2 \dots q_s.$$

$p_i \neq q_j$ semmilyen $\{i, j\}$ párra, különben n nem volna a legkisebb. Ez ellentmond a felbonthatatlanok prímtulajdonságának, ugyanis ha $p_1 \mid q_1 q_2 \dots q_s$, akkor $p_1 \mid q_j$ valamilyen j-re, de akkor q_j felbonthatatlan volta miatt $p_1 = q_j$ vagy $p_1 = 1$. Ellentmondás. □

Definíció

Két nullától különböző egész szám legkisebb közös többszöröse az a legkisebb pozitív egész, melynek mindkét szám osztója. Jelölései: $[a, b] = \text{lkkt}(a, b) = \text{lcm}(a, b)$ (least common multiple).

Legyen $a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}$, $b = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_r^{b_r}$ $(a_i, b_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \dots, r)$. Ekkor

- T $a \mid b \iff 0 \leqslant a_i \leqslant b_i$ $(i = 1, 2, \dots, r)$.
- T $(a, b) = p_1^{\min(a_1, b_1)} p_2^{\min(a_2, b_2)} \dots p_r^{\min(a_r, b_r)}$
- T $[a, b] = p_1^{\max(a_1, b_1)} p_2^{\max(a_2, b_2)} \dots p_r^{\max(a_r, b_r)}$
- T Ha a és b pozitív egész, akkor $[a, b](a, b) = ab$.
- B $\max(a_i, b_i) + \min(a_i, b_i) = a_i + b_i$,
  $p_i^{\max(a_i, b_i)} p_i^{\min(a_i, b_i)} = p_i^{\max(a_i, b_i) + \min(a_i, b_i)} = p_i^{a_i + b_i} = p_i^{a_i} p_i^{b_i}$.
- D Nullától különböző egészek legkisebb közös többszöröse az a legkisebb pozitív egész, melynek mindegyik szám osztója. Jelölés: $[a_1, a_2, \dots, a_n]$.

Definíció

$a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}^+$. Az a-nak m-mel való osztási maradékát a mod m jelöli. (Itt mod egy bináris, azaz kétváltozós művelet.)

P $12 \bmod 5 = 2$, $(-12) \bmod 5 = 3$.

Definíció

$a, b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}^+$. Azt mondjuk, hogy a kongruens b-vel modulo m, ha $m \mid a - b$. Jelölései: $a \equiv b \pmod{m}$, $a \equiv b \mod m$, $a \equiv b\ (m)$.

Á $m \mid a - b \iff m \mid b - a \iff a \bmod m = b \bmod m$

P $12 \equiv 107\ (5)$, mert $5 \mid 107 - 12$; $-6 \equiv 99\ (5)$, mert $5 \mid 99 - (-6)$.

P $13 \not\equiv 23\ (9)$, mert $9 \nmid 23 - 13$.

Á $a \equiv b\ (m) \iff$ van olyan k egész, hogy $a = b + km$.

B $m \mid a - b \iff$ van olyan k, hogy $a - b = km \iff a = b + km$.

Tétel (A kongruencia ekvivalenciareláció)

Reflexív: $a \equiv a \pmod{m}$,

Szimmetrikus: $a \equiv b \pmod{m} \iff b \equiv a \pmod{m}$

Tranzitív: $a \equiv b \pmod{m}$, $b \equiv c \pmod{m} \Rightarrow a \equiv c \pmod{m}$

- A kongruencia ekvivalenciareláció, tehát megad az egészek halmazán egy osztályozást (diszjunkt részhalmazok uniójára való felbontást): egy osztályba azok az egészek tartoznak, melyek azonos maradékot adnak a modulussal osztva. Pl.: modulo 3 a következő osztályozást adja:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, 0, 3, \dots\} \cup \{\dots, -2, 1, 4, \dots\} \cup \{\dots, -1, 2, 5, \dots\}$$

D a fenti osztályozás osztályait modulo m maradékosztályoknak nevezzük.

Tétel (Műveletek és kongruenciák)

Ha $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}^+$, *és* $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m}$, *akkor*

1. $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ *(spec.* $a + c \equiv b + c \pmod{m}$*)*
2. $a - c \equiv b - d \pmod{m}$ *(spec.* $a - c \equiv b - c \pmod{m}$*)*
3. $ac \equiv bd \pmod{m}$ *(spec.* $ac \equiv bc \pmod{m}$*)*

Tétel (Egyszerűsítés kongruenciában)

Ha $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}^+$, $d = (c, m)$ *és* $ac \equiv bc \pmod{m}$, *akkor*

$$a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$$

Ha $(c, m) = 1$, *akkor az* $ac \equiv bc \pmod{m}$ *kongruencia egyszerűsíthető* c*-vel, azaz ekkor* $a \equiv b \pmod{m}$.

B $ac \equiv bc \pmod{m} \rightsquigarrow m \mid (a-b)c \rightsquigarrow \exists k : (a-b)c = km \rightsquigarrow$
$(a-b)\frac{c}{d} = k\frac{m}{d}$. $(\frac{c}{d}, \frac{m}{d}) = 1$, ezért $\frac{m}{d} \mid a - b \rightsquigarrow a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$.

P $7 \equiv 33 \pmod{13} \rightsquigarrow 27 \equiv 53 \pmod{13}$ $[+20]$

P $7 \equiv 33 \pmod{13} \rightsquigarrow 70 \equiv 330 \pmod{13}$ $[\cdot 10]$

P $7 \equiv 33 \pmod{13}$, $4 \equiv 30 \pmod{13} \rightsquigarrow 28 \equiv 990 \pmod{13}$

P $14 \equiv 40 \pmod{13} \rightsquigarrow 7 \equiv 20 \pmod{13}$ $[/2]$

P $18 \equiv 66 \pmod{24} \rightsquigarrow 3 \equiv 11 \pmod{4}$ $[/6]$ $(6 = (18, 66))$

P $a \equiv b \pmod{m}$, $n \in \mathbb{N}^+ \rightsquigarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}$

1M n-szer összeszorozva az $a \equiv b \pmod{m}$ kongruenciát;

2M az $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + \ldots + b^{n-1})$ összefüggésből.

P $-4 \equiv 3 \pmod{7} \rightsquigarrow 256 \equiv 81 \pmod{7}$ $[x \mapsto x^4]$

T Ha $a \equiv b \pmod{m_1}$, $a \equiv b \pmod{m_2}$,..., $a \equiv b \pmod{m_n}$, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$, $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}^+$, akkor

$$a \equiv b \pmod{[m_1, m_2, \ldots, m_n]}.$$

B $m_1 \mid (a-b)$, $m_2 \mid (a-b)$,..., $m_n \mid (a-b) \rightsquigarrow$ $[m_1, m_2, \ldots, m_n] \mid (a-b)$.

Definíció

Egészek egy halmaza teljes maradékrendszer modulo m, ha minden egész szám e halmaznak pontosan egy elemével kongruens mod m.

P A $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ halmaz teljes maradékrendszer modulo m.

P Ha m páros, akkor a $\{-\frac{m-2}{2}, \ldots, 0, \ldots, \frac{m-2}{2}, \frac{m}{2}\}$ halmaz teljes maradékrendszer modulo m.

P Ha m páratlan, akkor a $\{-\frac{m-1}{2}, -\frac{m-3}{2}, \ldots, 0, \ldots, \frac{m-3}{2}, \frac{m-1}{2}\}$ halmaz teljes maradékrendszer modulo m.

P A $\{0, 1, 2, 4, 8\}$ halmaz teljes maradékrendszer modulo 5.

P A $\{0, 1, 3, 9, 27, 81, 243\}$ halmaz teljes maradékrendszer modulo 7.

Á m inkongruens egész szám halmaza teljes maradékrendszer modulo m.

T Ha $\{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$ teljes maradékrendszer modulo m, és $(a, m) = 1$, akkor $\{at_1 + b, at_2 + b, \ldots, at_m + b\}$ is teljes maradékrendszer mod m.

B $at_i + b \equiv at_j + b \ (m) \iff at_i \equiv at_j \ (m) \iff t_i \equiv t_j \ (m)$ (mert $(a, m) = 1$) $\iff i = j$. Így ez m inkongruens egész halmaza.

P Számítsuk ki 91^{89} mod 11 értékét!

1M $91^{89} = 22629966787881178104507938630530359755911966066400099150045124000595605179349487522472134992988960788694682422515792592896836945711385013041867663392902059917078793108355436 11 \equiv 4 \pmod{11}$

2M $91 \bmod 11 = 3$, $89 = 1011001_2$, $3^2 \bmod 11 = 9$, $3^4 \bmod 11 = 4$, $3^8 \bmod 11 = 5$, $3^{16} \bmod 11 = 3$, $3^{32} \bmod 11 = 9$, $3^{64} \bmod 11 = 4$.

$91^{89} \equiv 3^{89} = 3^{64} \cdot 3^{16} \cdot 3^8 \cdot 3 \equiv 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \equiv 4 \pmod{11}$.

3M

k	a	r	megjegyzések	
89	3	1	induló értékek	
88	3	3	$k \leftarrow k-1$, $r \leftarrow r \cdot a \bmod m$	$a \leftarrow 3$
44	9	3	$k \leftarrow k/2$, $a \leftarrow a \cdot a \bmod m$	$a \leftarrow 3^2 \bmod 11$
22	4	3	$k \leftarrow k/2$, $a \leftarrow a \cdot a \bmod m$	$a \leftarrow 3^4 \bmod 11$
11	5	3	$k \leftarrow k/2$, $a \leftarrow a \cdot a \bmod m$	$a \leftarrow 3^8 \bmod 11$
10	5	4	$k \leftarrow k-1$, $r \leftarrow r \cdot a \bmod m$	$r \leftarrow 3^8 \cdot 3 \bmod 11$
5	3	4	$k \leftarrow k/2$, $a \leftarrow a \cdot a \bmod m$	$a \leftarrow 3^{16} \bmod 11$
4	3	1	$k \leftarrow k-1$, $r \leftarrow r \cdot a \bmod m$	$r \leftarrow 3^{16} \cdot 3^8 \cdot 3 \bmod 11$
2	9	1	$k \leftarrow k/2$, $a \leftarrow a \cdot a \bmod m$	$a \leftarrow 3^{32} \bmod 11$
1	4	1	$k \leftarrow k/2$, $a \leftarrow a \cdot a \bmod m$	$a \leftarrow 3^{64} \bmod 11$
0	4	**4**	$k \leftarrow k-1$, $r \leftarrow r \cdot a \bmod m$	$r \leftarrow 3^{64} \cdot 3^{16} \cdot 3^8 \cdot 3 \bmod 11$

Legyen $k = (b_n \dots b_1 b_0)_2$, ekkor $a^k = a^{\sum_{i=0}^{n} b_i 2^i} = \prod_{i=0}^{n} (a^{2^i})^{b_i}$, így

$$a^k \bmod m = \prod_{i=0}^{n} (a^{2^i})^{b_i} \bmod m = \prod_{i=0}^{n} \left((a^{2^i})^{b_i} \bmod m \right) \bmod m$$

Algoritmus (Moduláris hatványozás)

- *Bemenet: a alap, k kitevő, m modulus, ahol* $a, k, m \in \mathbb{N}_0$, $m > 1$
- *Kimenet:* $r = a^k \bmod m$

1 $b \leftarrow b \bmod m$

2 $r = 1$

3 *ha* $k = 0$, *menj 8-ra*

4 *ha* $k \bmod 2 = 1$, *akkor* $r \leftarrow r \cdot a \bmod m$

5 $k \leftarrow \lfloor k/2 \rfloor$

6 $a \leftarrow a \cdot a \bmod m$

7 *menj 3-ra*

8 *r kiírása*

- Láttuk, hogy két egész szám összegének, különbségének, szorzatának vagy egy egész szám nemnegatív egész kitevős hatványának maradéka modulo m csak attól függ, hogy az összeadandók, a szorzandók, illetve a hatványozás alapja mely maradékosztályba tartoztak (vigyázzunk, a hatványozás kitevőjére ez nem igaz!).
- Legyen $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ és definiáljuk a $\langle \mathbb{Z}_m, \oplus, \otimes \rangle$ struktúrát a következőképp: ha $a, b \mathbb{Z}_n$, akkor $a \oplus b := a + b \bmod m$, $a \otimes b := a \cdot b \bmod m$.

P Írjuk fel $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$ és $\mathbb{Z}_5$ műveletábláit:

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\otimes$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\otimes$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\otimes$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

- A fenti művelettáblákról leolvasható, hogy az $a \oplus x = b$ $(a, b \in \mathbb{Z}_n)$ és az $a \otimes x = b$ $(a, b \in \mathbb{Z}_n,\ a \neq 0)$ egyenletek $n = 2, 3, 5$ esetén egyértelműen megoldhatók.
- Sőt, $a \oplus x = b$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén megoldható tetszőleges $a, b \in \mathbb{Z}_n$ esetén.
- A továbbiakban – ha félreértést nem okoz – $\mathbb{Z}_n$ alatt a $\langle \mathbb{Z}_n, \oplus, \otimes \rangle$ algebrai struktúrát értjük, amelynek műveleteire is gyakran a szokásos '$+$' és '$\cdot$' jeleket használjuk, azaz $\mathbb{Z}_n = \langle \mathbb{Z}_n, +, \cdot \rangle$.
- Írjuk fel $\mathbb{Z}_6$ műveletábláit:

$+$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

$\cdot$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

- Mivel $(a, m) = 1 \iff (a + km, m) = 1$, ezért ha egy modulo m maradékosztály egy eleme relatív prím m-hez, akkor az összes tagja is! Így beszélhetünk az m-hez relatív prím maradékosztályokról!

D Modulo m redukált maradékrendszernek nevezzük egészek egy R halmazát, ha minden m-hez relatív prím maradékosztályból R pontosan egy elemet tartalmaz.

Á Az $\{1, 2, \ldots, m-1\}$ halmaz m-hez relatív prím elemei redukált maradékrendszert alkotnak modulo m.

D Az m-hez relatív prím maradékosztályok számát $\varphi(m)$-mel jelöljük, és Euler-féle φ-függvénynek nevezzük.

P $\{1, 5\}$, $\{5, 7\}$, $\{1, 11\}$ redukált maradékrendszerek modulo 6, $\varphi(6) = 2$.

P $\{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$ redukált maradékrendszer mod 24, $\varphi(24) = 8$.

T Ha $\{r_1, r_2, \ldots, r_{\varphi(m)}\}$ egy redukált maradékrendszer modulo m, és $(a, m) = 1$, akkor $\{ar_1, ar_2, \ldots, ar_{\varphi(m)}\}$ is redukált maradékrendszer modulo m.

B $(a, m) = 1$ és $(r_i, m) = 1 \rightsquigarrow (ar_i, m) = 1$,
$ar_i \equiv ar_j \pmod{m}$, $(a, m) = 1 \rightsquigarrow r_i \equiv r_j \pmod{m}$,
tehát minden redukált maradékrendszerből egyetlen reprezentánsunk van, tehát e halmaz redukált maradékrendszer.

P $R_{12} = \{1, 5, 7, 11\}$ redukált maradékrendszer mod 12. Mivel $(5, 12) = 1$, ezért $R'_{12} = \{5 \cdot 1, 5 \cdot 5, 5 \cdot 7, 5 \cdot 11\}$ is redukált maradékrendszer mod 12.

P $\prod R_{12} \equiv \prod R'_{12} \pmod{12}$, mivel a két halmaz azonos elemeket tartalmaz mod 12 (mindkettő redukált maradékrendszer), azaz

$$1 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \equiv (5 \cdot 1) \cdot (5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 7) \cdot (5 \cdot 11) \pmod{12}$$

Ha egyszerűsítünk $1 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$-gyel, kapjuk

$$1 \equiv 5^4 \pmod{12}.$$

Tétel (Euler–Fermat-tétel)

Ha $m \in \mathbb{N}^+$, $a \in \mathbb{Z}$ *és* $(a, m) = 1$, *akkor* $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

Bizonyítás.

Legyen $R_m = \{r_1, r_2, \ldots, r_{\varphi(m)}\}$ egy redukált maradékrendszer modulo m, és mivel $(a, m) = 1$, ezért $R'_m = \{ar_1, ar_2, \ldots, ar_{\varphi(m)}\}$ is redukált maradékrendszer modulo m.

$$r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_{\varphi(m)} \equiv (ar_1) \cdot (ar_2) \cdot \cdots \cdot (ar_{\varphi(m)}) \pmod{m},$$

egyszerűsítés után: $1 \equiv a^{\varphi(m)} \pmod{m}$. □

Következmény („Kis” Fermat-tétel (első alak))

Ha p prím, $a \in \mathbb{Z}$ és $(a, p) = 1$, akkor $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Következmény („Kis” Fermat-tétel (második alak))

Ha p prím, $a \in \mathbb{Z}$, akkor $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Tétel

Ha $m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_t^{k_t}$, ahol $p_1, p_2, \dots, p_t$ prímszámok, akkor

$$\varphi(m) = m \prod_{i=1}^{t} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Tétel (Lineáris kongruenciák megoldhatósága és megoldásainak száma)

$a, b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}^+$, $(a, m) = d$. Az $ax \equiv b \pmod{m}$ kongruencia pontosan akkor oldható meg, ha $d \mid b$. Ha megoldható, akkor pontosan d inkongruens megoldása van mod m.

Bizonyítás.

(Megoldhatóság) $ax \equiv b \pmod{m}$ megoldható $\iff \exists y : ax - my = b$ $\iff d \mid b$.

(Megoldások száma) $ax - my = b$ megoldásai: $x = x_0 + \frac{m}{d}t$, $y = y_0 + \frac{a}{d}t$. Meghatározandó, hogy az $x = x_0 + \frac{m}{d}t$ megoldások hány maradékosztályba esnek mod m, azaz hány inkongruens megoldás található köztük.

$x_0 + \frac{m}{d}t_1 \equiv x_0 + \frac{m}{d}t_2 \pmod{m} \iff \frac{m}{d}t_1 \equiv \frac{m}{d}t_2 \pmod{m}$

$\iff t_1 \equiv t_2 \pmod{d}$, ugyanis $(m, \frac{m}{d}) = \frac{m}{d}$, és $m/(\frac{m}{d}) = d$. □

P Oldjuk meg a $12x \equiv 15\ (21)$ kongruenciát!

M A kongruencia megoldható, mert $(12, 21) = 3 \mid 15$.

Ekvivalens diofantoszi egyenlet: $12x - 21y = 15$.

Az euklideszi algoritmusból: $3 = 2 \cdot 12 + (-1) \cdot 21 \rightsquigarrow$

$15 = 10 \cdot 12 - 5 \cdot 21$, amiből az összes megoldás:

$x \equiv 10\ (21)$, $x \equiv 10 + 7 \equiv 17\ (21)$, $x \equiv 10 + 2 \cdot 7 \equiv 24 \equiv 3\ (21)$.

D Ha $a \in \mathbb{Z}$ és $(a, m) = 1$, akkor az $ax \equiv 1\ (m)$ kongruencia egy megoldását az *a* elem moduláris inverzének nevezzük modulo m.

P Határozzuk meg az 5 moduláris inverzeit modulo 26.

M $(5, 26) = 1$, tehát az $5x \equiv 1\ (26)$ kongruencia megoldható.

$1 = (-5) \cdot 5 + 26 \rightsquigarrow x \equiv -5$ egy inverz (az összes: $x \equiv -5 \equiv 21\ (26)$, azaz $x = -5 + 26k$).

P Oldjuk meg az $5x \equiv 7\ (26)$ kongruenciát az előző példát használva!

M $(-5) \cdot 5 \equiv 1\ (26) \rightsquigarrow 7 \cdot (-5) \cdot 5 \equiv 7\ (26) \rightsquigarrow x \equiv -35 \equiv 17\ (26)$

T Ha p prím, a $\mathbb{Z}_p$ algebrai struktúrában az összeadás kommutatív, asszociatív, invertálható művelet (azaz az $a + x = b$ egyenlet $\mathbb{Z}_p$-ben megoldható), a szorzás kommutatív, asszociatív, és a $\mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ halmazon invertálható (azaz az $a \cdot x = b$ egyenlet megoldható $\mathbb{Z}_p^*$-ban, ha $a, b \in \mathbb{Z}_p^*$), végül a szorzás az összeadásra nézve disztributív.

M Ugyanezekkel a tulajdonságokkal rendelkezik $\mathbb{R}$ és $\mathbb{Q}$ is, ezeket a struktúrákat algebrai testeknek fogjuk nevezni.

M $\mathbb{Z}_m$-ben, ha m nem prím, a szorzás nem invertálható, de kommutatív. Az ilyen algebrai struktúrákat kommutatív gyűrűknek nevezzük.

M $\mathbb{Z}_m$-ben az egységek egy redukált maradékrendszerrel reprezentált elemek.

M Elem invertálhatósága (additív inverz az ellentett, multiplikatív inverz a reciprok) és művelet (összeadás, szorzás) invertálhatósága két különböző dolog, de szoros kapcsolatban állnak. Mi a kapcsolat?

P Számítsuk ki $\mathbb{Z}_{11}$-ben a $\dfrac{7}{3^{89}}$ értékét!

M Korábban kiszámoltuk: $3^{89} = 4$, és $\frac{7}{4} = 10$, tehát $\mathbb{Z}_{11}$-ben $\frac{7}{3^{89}} = 10$.

Tétel (Kínai maradéktétel)

Legyenek m_1, m_2,... m_n pozitív, páronként relatív prím egészek, és legyen $M = m_1 m_2 \dots m_n$. Az

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x &\equiv a_2 \pmod{m_2} \\ &\vdots \\ x &\equiv a_n \pmod{m_n} \end{aligned}$$

kongruenciarendszer egyértelműen megoldható modulo M.

Bizonyítás.

Legyen $M_k = M/m_k = m_1 \dots m_{k-1} m_{k+1} \dots m_n$. Mivel $(M_k, m_k) = 1$, ezért az $M_k x_k \equiv 1 \ (m_k)$ kongruencia minden k-ra egyértelműen megoldható. Tekintsük az

$$x = a_1 M_1 x_1 + a_2 M_2 x_2 + \ldots + a_n M_n x_n$$

összeget. Ez egyrészt megoldása mindegyik kongruenciának (mert pl. $a_1 M_1 x_1 \equiv a_1 \cdot 1 \equiv a_1 \ (m_1)$, de $a_k M_k x_k \equiv 0 \ (m_1)$, ha $k \neq 1$, mert $M_k \equiv 0 \ (m_1)$). Másrészt, ha x' egy másik megoldás, akkor $x \equiv x' \ (m_k)$, azaz $(x - x') \mid m_k$, következésképp $(x - x') \mid M$, tehát a megoldás egyértelmű mod M. □

P Oldjuk meg az

$$x \equiv 2 \pmod 3$$
$$x \equiv 3 \pmod 5$$
$$x \equiv 4 \pmod 7$$

kongruenciarendszert!

1M A bizonyítás alapján: $M = 105$, $M_1 = 35$, $M_2 = 21$, $M_3 = 15$,

$M_1 x_1 \equiv 1 \ (3) \rightsquigarrow x_1 = 2$,
$M_2 x_2 \equiv 1 \ (5) \rightsquigarrow x_2 = 1$,
$M_3 x_3 \equiv 1 \ (7) \rightsquigarrow x_3 = 1$,

$x = 2 \cdot 35 \cdot 2 + 3 \cdot 21 \cdot 1 + 4 \cdot 15 \cdot 1 \bmod 105 = 140 + 63 + 60 \bmod 105 = 53.$

2M $x \equiv 2 \ (3) \rightsquigarrow x = 3k + 2$,

$3k + 2 \equiv 3 \ (5) \rightsquigarrow k = 5\ell + 2 \rightsquigarrow x = 3(5\ell + 2) + 2 = 15\ell + 8$,

$15\ell + 8 \equiv 4 \ (7) \rightsquigarrow \ell \equiv 3 \ (7) \rightsquigarrow \ell = 7n + 3 \rightsquigarrow$
$x = 15(7n + 3) + 8 = 105n + 53$

P 2-nek melyik hatványaival osztható 19753072?

M $2 \mid 2$, $4 \mid 72$, $8 \mid 72$, $16 \mid 3072$, de $32 \nmid 53072$, tehát 2^4 a 2 legnagyobb hatványa, mellyel osztható.

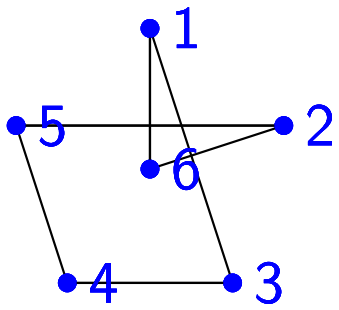
P Igazoljuk, hogy egy pozitív egész 9-cel való osztási maradéka megegyezik számjegyei összegének 9-cel való osztási maradékával!

M $a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_1 10 + a_0 \equiv$
$a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 10 + a_0 \pmod 9$

P Mi a 11-gyel való oszthatóság szabálya?

M $a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_1 10 + a_0 \equiv$
$a_n (-1)^n + a_{n-1} (-1)^{n-1} + \cdots - a_1 + a_0 \pmod{11}$

P Legyen n páros pozitív egész.
Bonyolítsunk le egy $n-1$-fordulós körmérkőzést n induló esetén.



M A k-adik fordulóban a k-adik játékos az n-edikkel játszik.
Az i-edik és j-edik játékos a k-adik fordulóban játszik, ha $i+j \equiv 2k \pmod{n-1}$, ahol $k = 1, 2, \ldots, n-1$.
E kongruencia minden i, j pár esetén egyértelműen megoldható k-ra, mivel $2 \nmid n-1$, és egyértelműen megoldható i-re vagy j-re is, ha a másik két szám adva van. Így valóban egy körmérkőzést kapunk.

P A magyar személyi szám $1+6+3+1 = 11$ jegyű, és

$$x_{11} \equiv \sum_{i=1}^{10} i x_i \pmod{11}$$

Milyen hibákat jelez ez a módszer, és miért jobb, mint mod 10?

P ISBN-13 és EAN (European Article Number):
$x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 + 3x_6 + \ldots + 3x_{12} + x_{13} \equiv 0 \pmod{10}$

Feladat (Öröknaptár)

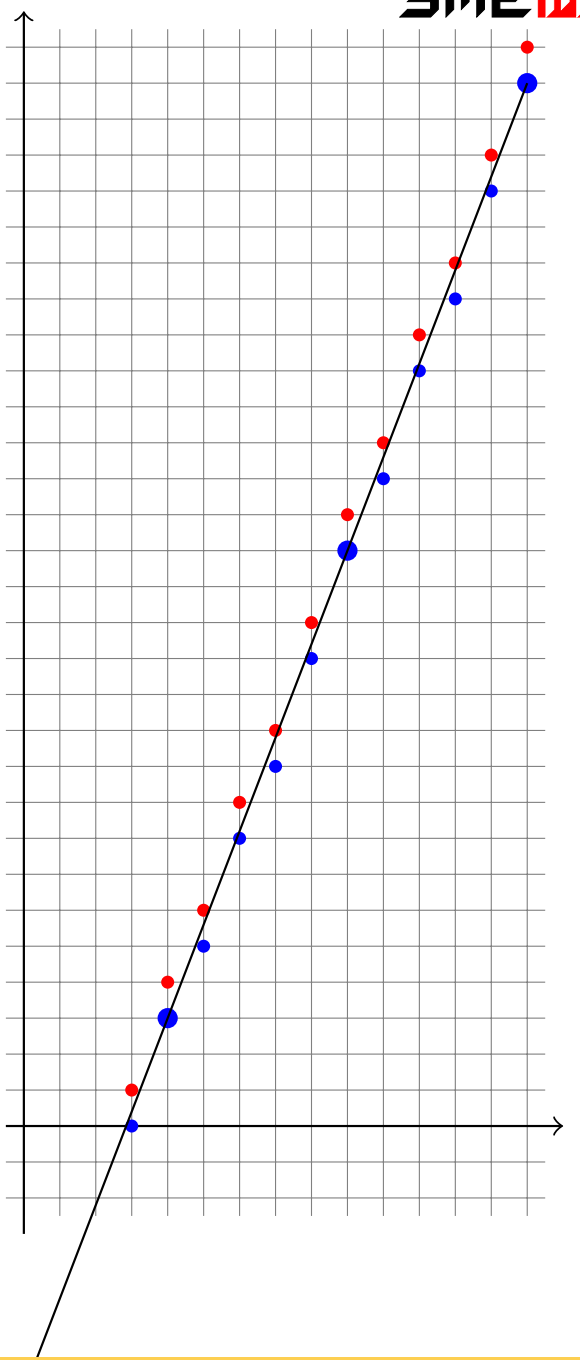
Jelölje a YYYY-MM-DD formátumban megadott dátum évszámát y, hónapjának sorszámát m, napjáét d azzal a módosítással, hogy január sorszáma 13, februáré 14 legyen, és ekkor az évszám csökkenjen eggyel. Tehát pl. 2015-01-15 alakja 2014-13-15 legyen, azaz $y = 2014$, $m = 13$, $d = 15$: Hasonlóképp 2000-02-11 esetén $y = 1999$, $m = 14$, $d = 11$. A hét napjainak sorszámát jelölje w, ahol hétfőn $w = 1, \ldots,$ vasárnap $w = 7$ (a megfelelő ISO-szabványnak megfelelően). Igazoljuk, hogy a következő képlet megadja, hogy egy dátum a Gregorián naptár szerint a hét mely napjára esik:

$$w = \left(\left(d + \left\lfloor \frac{13m - 32}{5} \right\rfloor + y + \left\lfloor \frac{y}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y}{400} \right\rfloor\right) \bmod 7\right) + 1$$

- Egy hónapon belül $w \equiv d + C \ (7)$
- $365 \equiv 1 \ (7)$, ezért minden év egyet ad w-hez: $w \equiv d + y + C \ (7)$
- A szökőévek még egyet: $w \equiv d + y + \lfloor \frac{y}{4} \rfloor - \lfloor \frac{y}{100} \rfloor + \lfloor \frac{y}{400} \rfloor + C \ (7)$
- A hónapok változó hozzájárulása:

M	Á	M	J	J	A	S	O	N	D	J	F
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
31	30	31	30	31	31	30	31	30	31	31	28
3	2	3	2	3	3	2	3	2	3	3	
0	3	5	8	10	13	16	18	21	23	26	29

- Innen jön még $\frac{13}{5}m - \frac{37}{5}$,
- Végül egy konkrét dátummal meghatározzuk C értékét ($= 1$) arra is figyelve, hogy w ne a $[0, 6]$, hanem az $[1, 7]$ intervallumba essen.



P 2015-09-18

M $y = 2015,\ m = 9,\ d = 18,$

$$w = \left(\left(18 + \left\lfloor \frac{13 \cdot 9 - 32}{5} \right\rfloor + 2015 + \left\lfloor \frac{2015}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2015}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2015}{400} \right\rfloor\right) \bmod 7\right) + 1$$
$$= (4 + 3 + 6 + 6 - 6 + 5) \bmod 7 + 1 = 5 = \text{péntek}$$