13. Házi feladat (határidő nincs)

1. Kiegészítő alterek-e $\mathbb{R}^5$-ben a $\operatorname{span}((1,2,3,4,5),(0,1,2,3,4),(0,0,1,2,3))$ és a $\operatorname{span}((0,1,0,1,0),(1,0,0,0,1))$ alterek?

2. Határozzuk meg az $(1,2,3,4,5)$, $(1,1,2,3,4)$, $(1,1,1,2,3)$ vektorok által kifeszített altér merőleges kiegészítő alterének egy bázisát!

3. Igazoljuk, hogy $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ pontosan akkor invertálható, ha $\mathbf{A}$ teljes oszloprangú!

4. Határozzuk meg az $(1,2,1)$ normálvektorú síkra való merőleges vetítés mátrixát három különböző módszerrel!

5. Határozzuk meg az

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

mátrix oszlopterére való merőleges vetítés mátrixát!

6. Írjuk fel az origón átmenő, $\mathbf{v}=(0,1,1)$ irányvektorú E egyenes mentén az $x+y+z=0$ egyenletű S síkra vetítő leképezés mátrixát, valamint az S sík mentén az E egyenesre való vetítés mátrixát!

7. Adjuk meg az $(7,7,7,7)$ vektornak az $(2/7,0,3/7,6/7)$, $(3/7,0,-6/7,2/7)$, $(6/7,0,2/7,-3/7)$ vektorok által kifeszített altérre eső merőleges vetületét!

8. Írjunk fel egy olyan mátrixot, mely az $\mathbb{R}^4$ tér vektorait a tér egy 2-dimenziós altere mentén egy másik 2-dimenziós alterére vetíti, és e két altér nem merőleges egymásra.

9. Határozzuk meg az

$$\begin{aligned}x\phantom{{}+y}+z+2w&=4\\2x+y+z+2w&=-6\\x+y\phantom{{}+z+2w}&=9\end{aligned}$$

egyenletrendszer optimális megoldásait (a normálegyenlet-rendszer segítségével), valamint válasszuk ki közülük az egyetlen sortérbe eső megoldást. (Ezután ez utóbbi feladatot oldjuk meg számítógéppel is először a pseudoinverz kiszámolásával, majd octave-ban mátrixok osztásával!)

10. Számítsuk ki az $\left[\begin{smallmatrix}1&1\\2&2\end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix}0&2\\0&2\end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{smallmatrix}\right]$ és az $[1\ 1\ 1\ 1]$ mátrixok pszeudoinverzét!

11. Mutassuk meg, hogy ha $\mathrm{r}(\mathbf{A})=1$, akkor

$$\mathbf{A}^+=\frac{1}{\operatorname{trace}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})}\mathbf{A}^T,$$

ahol $\operatorname{trace}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$ az $\mathbf{A}$ elemeinek négyzetösszege. Eszerint ha $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$, akkor

$$\mathbf{a}^+=\frac{1}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}^T=\frac{1}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a}^T.$$

12. Igazoljuk a Penrose-feltételek ellenőrzésével, hogy blokkdiagonális mátrix esetén

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1&\mathbf{O}&\dots&\mathbf{O}\\\mathbf{O}&\mathbf{A}_2&\dots&\mathbf{O}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\mathbf{O}&\mathbf{O}&\dots&\mathbf{A}_k\end{bmatrix}^+=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1^+&\mathbf{O}&\dots&\mathbf{O}\\\mathbf{O}&\mathbf{A}_2^+&\dots&\mathbf{O}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\mathbf{O}&\mathbf{O}&\dots&\mathbf{A}_k^+\end{bmatrix}$$

13. Számítsuk ki a

$$\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&2\\1&0&1\end{bmatrix}$$

pszeudoinverzét a bázisfelbontás segítségével, majd ezt fölhasználva határozzuk meg az

$$\begin{aligned}y+z&=3\\x+y+2z&=2\\x\phantom{{}+y}+z&=2\end{aligned}$$

egyenletrendszer minimális abszolút értékű optimális megoldását, és összes optimális megoldását! Az összes megoldást számoljuk ki a normálegyenlet-rendszer segítségével is!

+1. Az x_i helyen egy függvény értékét y_i-nek mérjük egy kísérletben a következő táblázat szerint:

i	0	1	2	3	4
x_i	-3	-1	0	2	3
y_i	2	-2	-2	5	10

Melyik másodfokú polinom adja e függvény optimális közelítését a legkisebb négyzetek elve szerint? (Számítógéppel számoljunk!)

Szorgalmi feladatok

*1 Legyen $P:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ egy vetítés. Mutassuk meg, hogy P pontosan akkor merőleges vetítés, ha minden $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ vektorra $|P\mathbf{v}|\le|\mathbf{v}|$.

*2 Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ egy merőleges vetítés mátrixa, azaz $\mathbf{A}^T=\mathbf{A}=\mathbf{A}^2$, akkor $\mathbf{A}^+=\mathbf{A}$. Igaz-e az állítás megfordítása?