## 12. Házi feladat (határidő: 2015-12-4)

*A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!*

1. Melyek lineárisak az alábbi leképezések közül? Amelyik igen, azt írjuk fel valamilyen mátrixszal való balszorzásként! Mi a lineáris leképezés magtere és képtere?

   *a)* $(x, y, z) \mapsto (x - 2y, z, x + y + z)$

   *b)* $(x, y, z) \mapsto (x + 2y, 3x - y)$

   *c)* $(x, y, z) \mapsto (1, x, x^2 y)$

2. Legyen a $\phi$ leképezés az $\mathbb{R}^3$ pontjainak a $z$ tengelyre való merőleges vetítése. Mutassuk meg, hogy ez lineáris leképezés. Adjuk meg $\phi$ mátrixát a standard bázisban! Határozzuk meg $\phi$ magterét és képterét és ezek dimenzióját!

3. Adjuk meg az $(1, 1, 1)$ normálvektorú, origón átmenő síkra való tükrözés mátrixát standard bázisban.

   *a)* Báziscsere segítségével.

   *b)* Diadikus módszer segítségével.

4. Adjuk meg annak a $T$ lineáris transzformációnak a standard mátrixát amelyre

   *a)* $T : (1, 0) \mapsto (3, 1), (1, 1) \mapsto (-1, 2)$

   *b)* $T : (1, 1, 0) \mapsto (0, 1, 4),\ (1.0.1) \mapsto (1, 2, 4),\ (0, 1, 1) \mapsto (-1, 3, 2)$

5. Az $xy + z = 0$ felületet mibe viszi az a lineáris transzformáció, amelynek mátrixa $\mathbf{A}$, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Döntsük el, hogy az alábbi mátrixok között melyek hasonlóak $\mathbb{R}$ fölött?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

7. Tekintsük $\mathbb{R}^5$ térnek a $(0, 1, 1, 1, 0)$, $(1, 0, 1, 0, 0)$ és $(1, 1, 1, 1, 0)$ vektorok kifeszített $\mathcal{V}$ alterét.

   *a)* Írjuk fel az $\mathcal{V}$ altérre való merőleges vetítés mátrixát.

   *b)* Adjuk meg az $(1, 2, 3, 4, 5)$ vektornak a $\mathcal{V}$-be eső merőleges vetületét, és a $\mathcal{V}$-re való tükörképét.

   *c)* Írjuk fel a $\mathcal{V}$-re való tükrözés mátrixát!

8. Legyen $\mathcal{V}$ az előző feladatbeli altér, és legyen $\mathcal{W}$ az $(1, 1, 1, 1, 1)$ és a $(0, 0, 0, 1, 0)$ vektorok által kifeszített altér.

   *a)* Írjuk fel a $\mathcal{V}$-re $\mathcal{W}$ mentén való vetítés mátrixát, valamint a $\mathcal{W}$-re $\mathcal{V}$ mentén való vetítés mátrixát.

   *b)* Bontsuk fel az $(1, 2, 3, 4, 5)$ vektort egy $\mathcal{V}$-be és egy $\mathcal{W}$-be eső vektor összegére.

9. Legyen $\Phi$ az a leképezés, amely egy $n \times n$-es mátrixhoz a nyomát rendeli. Mutassuk meg, hogy ez lineáris leképezés $\mathrm{M}_n[\mathbb{R}]$-ből $\mathbb{R}$-be. Adjunk meg, $\mathrm{M}_n[\mathbb{R}]$-ben és $\mathbb{R}$-ben egy-egy bázist, és írjuk fel a leképezés mátrixát ebben a bázispárban. Mi lesz a leképezés képtere és magtere? Adjunk meg a kép és magtérben egy-egy bázist és adjuk meg ezen terek dimenzióját!

10. Jelölje $\mathcal{E}$ az $\mathbb{R}^3$ standard bázisát, és legyen $\mathcal{B} = \{(1, 2, 0), (1, 1, -1), (1, 0, -1)\}$ egy másik bázisa. Írjuk fel a $T$ lineáris transzformáció mátrixát a megadott bázisban, ha ismerjük mátrixát a másikban:

    *a)* $[T]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$. $[T]_{\mathcal{B}} =?$

    *b)* $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$. $[T]_{\mathcal{E}} =?$

## Gyakorló feladatok

1. Melyek lineárisak az alábbi leképezések közül? Amelyik igen, azt írjuk fel valamilyen mátrixszal való balszorzásként! Mi a lineáris leképezés mageter és képtere?

   *a)* $(x, y, z) \mapsto (x + 1, y + 1, z + 1)$

   *b)* $(x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - 2z)$

   *c)* $(x, y, z) \mapsto (a_1, a_2, a_3) \times (x, y, z)$

2. Mely vektorterek izomorfak: *a)* $\mathbb{R}^6$ ($\mathbb{R}$ felett), *b)* $\mathbb{R}^{3x2}$ ($\mathbb{R}$ felett), *c)* $\mathbb{C}^3$ ($\mathbb{R}$ felett)?

3. Mutassuk meg, hogy ha egy $\phi : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$ vektorterek közti lineáris leképezés $\mathcal{V}_1$ egy bázisát $\mathcal{V}_2$ egy bázisába viszi 1-1 módon, akkor ez a leképezés kölcsönösen egyételmű $\mathcal{V}_1$ és $\mathcal{V}_2$ között.

4. Lehet-e egy $f$ lineáris leképezésre

   *a)* $\dim(\mathrm{Im}(f^2)) > \dim(\mathrm{Im}\, f)$

   *b)* $\dim(\mathrm{Im}(f^2)) = \dim(\mathrm{Im}(f)) - 2$. Ha lehet, adjunk példát, ha nem, indokoljunk!

5. Legyen $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ lineáris leképezés $v_1, ..., v_n \in \mathcal{V}$ tetszőleges vektorok. Mely állítások következnek valamelyik másikból (esetleg több másikból)?

   *a)* $\phi$ injektív,

   *b)* $\phi$ szürjektív,

   *c)* $v_1, ..., v_n$ generátorrendszer $\mathcal{V}$-ben,

   *d)* $\phi(v_1), ..., \phi(v_n)$ generátorrendszer $W$-ben,

   *e)* $v_1, ..., v_n$ lineárisan független $V$-ben,

   *f)* $\phi(v_1), ..., \phi(v_n)$ lineárisan független $\mathcal{W}$-ben,

   *g)* $\mathcal{V}$-ben van olyan bázis, melynek képe lineárisan független $\mathcal{W}$-ben Változik-e a következtetések rendszere, ha föltesszük, hogy $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W}$ véges szám.

6. Adjuk meg az alábbi lineáris leképezések mátrixát a megadott bázispárban!

   *a)* a sík $\alpha$ szögű elforgatása az origó körül (a bázis mindkét térben *(i)* $\{(1,0),(0,1)\}$; *(ii)* $\{(1,0),(\cos(\alpha),\sin(\alpha))\}$;

   *b)* a legfeljebb $n$-edfokú valós polinomok terén a deriválás mátrixa (a bázis mindkét térben $1, x, x^2, ..., x^n$)

   *c)* $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$; $(a, b, c) \mapsto (a+b, 2a-c)$ (a standard bázisokkal)

   *d)* a sík helyvektorainak tükrözése egy origón átmenő $\alpha$ irányszögű egyenesre (a standard bázisban)!

7. Adjuk meg az alábbi lineáris leképezések mátrixát a standard bázisban! Adjuk meg a leképezések magterét és képterét és ezek dimenzióját!

   *a)* $\mathbb{R}^3$ pontjainak $z$ tengely körüli elforgatása $\alpha$ szöggel. *b)* $\mathbb{R}^3$ pontjainak $xy$ síkra való tükrözése. *c)* $\mathbb{R}^3$ pontjainak $xy$ síkra való merőleges vetítése. *d)* $\mathbb{R}^3$ pontjainak $z$ tengely irányú 3-szoros nyújtása! *e)* $\mathbb{R}^3$ pontjainak $z$ tengelyre való tükrözése. *f)* Adjuk meg két korábbi transzformáció kompozíciójának és összegének mátrixát!

8. Az előző feladatot módosítsuk úgy, hogy a forgatás, tükrözés, vetítés tengelye, illetve síkja általános helyzetű, de továbbra is 0-n átmenő legyen!

9. *a)* Adjunk meg egy lineáris transzformációt, amely az $\mathbb{R}^3$ standard bázsiát $v_1, v_2, v_3$ vektorokba viszi! Írjuk fel mátrixát a standard bázisban!

   *b)* Adjunk meg egy lineáris transzformációt, amely az $\mathbb{R}^3$ $w_1, w_3, w_3$ vektorait $v_1, v_2, v_3$ vektorokba viszi! Írjuk fel mátrixát a standard bázisban!

10. Legyen $f : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lineáris transzformáció! Mutassuk meg, hogy vagy $\mathcal{V} = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f$ vagy vagy $f^2$ rangja kisebb $f$ rangjánál!

11. Adjuk meg a mátrixát a következő lineáris leképéskenek a megadott bázisban (vagy bázispárban)! Adjuk meg a képtér és a magtér egy-egy bázisát!

    *a)* $f(x, y, z) = (x+2y-z, x-y+z)$ standard bázisban, illetve a $\mathcal{B}_1 = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$ és $\mathcal{B}_2 = \{(1,2),(2,1)\}$ bázispárban!

    *b)* az $x = t$, $y = 2t$, $z = -t$ tengely körüli $90^o$-os forgatás a standard bázisban!

    *c)* a $3 \times 3$-as valós mátrixokon az $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ leképezés a standard bázisban!

12. Legyen egy $\mathcal{V}$ vektortérben $\mathcal{A} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ és $\mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ két bázis. Írjuk fel az identikus leképezés mátrixát az $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$ bázispárban. Mik lesznek ennek az oszlopvektorai? Mi a kapcsolata ennek a mátrixnak a $\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$ áttérési mátrixszal?

## Szorgalmi feladatok

*1 Adjunk példát olyan mátrixra, amely nem hasonló diagonális mátrixhoz!

*2 Mutassuk meg, hogy ha két $n \times n$-es komplex elemű mátrix felcserélhető, és mindkettő hasonló egy diagonális mátrixhoz, akkor közös mátrixsszal is diagonalizálni tudjuk őket.