11. Házi feladat (határidő: 2015-11-30)

A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Számítsuk ki az alábbi mátrix determinánsát és inverzét aldeterminánsok segítségével:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Cramer szabály alkalmazásával oldjuk meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert, ha $\mathbf{A}$ az előző feladatbeli mátrix, $\mathbf{b} = [1\ 0\ -1\ 0]^T$.

3. Oldjuk meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ és az $\mathbf{x}^T\mathbf{A} = \mathbf{b}^T$ egyenletrendszert $\mathbf{A}^{-1}$-vel való beszorzással az előző feladatbeli $\mathbf{A}$-val és $\mathbf{b}$-vel.

4. Határozzuk meg az alábbi mátrix determinánsát:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -3 & 9 & -27 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Határozzuk meg az alábbi $2n \times 2n$-es

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{I} \\ \mathbf{O} & \mathbf{X} \end{bmatrix}$$

blokkmátrix determinánsát és inverzét, ahol $\mathbf{I}, \mathbf{O}, \mathbf{X} \in \mathrm{M}_n[\mathbb{R}]$, $\mathbf{O}$ a nullmátrix, $\mathbf{I}$ az egységmátrix, és $\mathbf{X}$ mellékátlójában -1-esek, egyebütt nullák állnak.

6. Határozzuk meg az alábbi két mátrix determinánsát (a nem zérus értékű) kígyók determinánsának összegére való bontással:

$$a)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

7. Számítsuk ki az alábbi összeget!

$$\sum_{k=1}^{10} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ (-1)^k 2k & (-1)^k 3k & 2 \end{vmatrix}.$$

8. Legyen $\mathbf{v} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$. Konstruáljunk $\mathbb{R}^3$-ban egy ortonormált bázist, melynek első vektora $\mathbf{v}$. Legyen a vektorrendszer jobbrendszer.

9. Mutassuk meg, hogy minden ortogonális mátrix determinánsa $+1$ vagy -1.

10. Határozzuk meg az alábbi mátrix rangját a maximális méretű nem nulla aldetermináns méretének meghatározásával:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Gyakorló feladatok

1. Határozzuk meg az alábbi mátrix deteminánsát és inverzét aldeterminánsok segítségével, a determinánst számoljuk ki kígyók deteminánsának összegére bontással is:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Határozzuk meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldását *a)* Cramer-szabállyal, *b)* $\mathbf{A}^{-1}$-zel való beszorzással, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

3. *a)* Bizonyítsuk be a vektoriális szorzás determinánsos alakját. *b)* Vezessük le belőle a paralelogramma előjeles területére és a paralellepipedon előjeles térfogatára vonatkozó determinánst.

4. Számítsuk ki a következő determinánst $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5$ felett:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

5. Mutassuk meg, hogy egy π permutáció és π^{-1} inverzének ugyanannyi inverziója van.

Szorgalmi feladatok

*1 Legyen $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_n[\mathbb{C}]$ mátrix $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, ahol $a_{ij} = (x_i + y_i)^{-1}$. Határozzuk meg $\mathbf{A}$ determinánsát!

*2 Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_{n\times m}[\mathbb{C}]$ és $\mathbf{B} \in \mathrm{M}_{m\times n}[\mathbb{C}]$, mátrixok, ahol $n \le m$, akkor

$$\det(\mathbf{AB}) = \sum_{1\le k_1<\ldots<k_n\le m} A_{k_1,\ldots k_n} B^{k_1,\ldots,k_n},$$

ahol $A_{k_1,\ldots,k_n}$ az $\mathbf{A}$ mátrix megfelelő oszlopaiból, $B^{k_1,\ldots,k_n}$ a $\mathbf{B}$ megfelelő soraiból álló aldeterminánsát jelöli.