10. Házi feladat (határidő: 2015-11-20)

A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Elemi sorműveletek alkalmazásával számítsuk ki az alábbi determinánsokat!

$$a) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \qquad b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

2. Határozzuk meg az elemi mátrixok determinánsát!

3. Legyen az 5×5-ös $\mathbf{A}$ mátrix determinánsa 3, az 5×5-ös C mátrixé $c \neq 0$. Mi lesz a determinánsa a következő mátrixoknak: *a)* $2\mathbf{A}^{-1}$, *b)* $(2\mathbf{A})^{-1}$, *c)* $\mathbf{A}^2\mathbf{A}^T\mathbf{A}^{-1}$, *d)* $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$.

4. Számítsuk ki a következő $n \times n$-es determináns értékét! (Ötlet: a második sort vonjuk ki az összes többiből.)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}$$

5. Számítsuk ki a a Pascal-háromszögből képzett

$$\left| \binom{i+j-2}{j-1} \right|_{n \times n} = \begin{vmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{1} & \dots & \binom{n-1}{n-1} \\ \binom{1}{0} & \binom{2}{1} & \dots & \binom{n}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n-1}{0} & \binom{n}{1} & \dots & \binom{2n-2}{n-1} \end{vmatrix}$$

determináns értékét! (Útmutatás: az utolsó sorral kezdve mindegyik sorból vonjuk ki az előzőt!)

6. Számítsuk ki a

$$\begin{vmatrix} b & a & a \\ a & b & a \\ a & a & b \end{vmatrix}$$

determináns értékét! Hogyan lehet ezt általánosítani?

7. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Határozzuk meg $\det(\mathbf{A})$-t. Hogyan lehet ezt általánosítani?

8. Hány inverzió van az alábbi permutációkban?

a) $1, 2, 3, 4$; *b)* $2, 4, 3, 1$; *c)* $5, 4, 1, 3, 2, 6$; *d)* $n, (n-1), \dots, 1$; *e)* $1, 3, \dots (2n-1), 2, 4, \dots 2n$.

Írjuk fel az ezekhez tartozó permutáló mátrixokat és determinánsuk értékét!

9. Igazoljuk, hogy ha a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$ vektorok koordinátavektorai $\mathcal{C}$ és $\mathcal{B}$ bázisokban $[\mathbf{v}_1]_\mathcal{C}, \dots, [\mathbf{v}_n]_\mathcal{C}$ illetve $[\mathbf{v}_1]_\mathcal{B}, \dots, [\mathbf{v}_n]_\mathcal{B}$, és a koordinátavektorokból álló mátrixok determinánsai $\det(\mathbf{V}_\mathcal{C})$ és $\det(\mathbf{V}_\mathcal{B})$, akkor $\det(\mathbf{V}_\mathcal{C}) = \det(\mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}})\det(\mathbf{V}_\mathcal{B})$, ahol $\mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ a $\mathcal{B}$ bázisról a $\mathcal{C}$ bázisra való áttérés mátrixa.

10. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix PLU-felbontását és annak segítségével a determinánsát.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Gyakorló feladatok

1. Elemi sorműveletek alkalmazásával számítsuk ki az alábbi determinánsokat:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

2. Számítsuk ki a következő $n \times n$-es determinánst:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

3. Határozzuk meg egy permutációs mátrix determinánsát!

4. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{bmatrix}$$

Mutassuk meg, hogy $\det(\mathbf{A}) = (x_3 - x_2)(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)$. Hogyan lehet ezt általánosítani?

5. Mutassuk meg, hogy egy egész elemű mátrix inverze pontosan akkor egész elemű, ha a mátrix determinánsa $+1$ vagy -1.

6. Mi történik egy kifejtési tagban az inverziók számával, ha a mátrixot a mellékátlóra tükrözzük?

7. n elem sorbarendezésénél mi az inverziók számának maximuma?

8. Mutassuk meg, hogy minden permutáció diszjunkt ciklusok szorzata. Mutassuk meg, hogy páros hosszú ciklus páratlan permutáció, páratlan hosszú ciklus páros permutáció.

9. Mutassuk meg, hogy ha egy $2n \times 2n$ blokkmátrix $n \times n$-es blokkjai $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ felcserélhetők, akkor

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} = \det(\mathbf{AD} - \mathbf{BC}).$$

10. Az alábbi – lottótippekből álló – determináns elemeinek oszthatósági tulajdonságait vizsgálva a determináns kiszámolása nélkül mutassuk meg, hogy

$$\begin{vmatrix} 3 & 10 & 33 & 66 & 81 \\ 6 & 12 & 23 & 69 & 90 \\ 3 & 21 & 57 & 72 & 88 \\ 5 & 33 & 36 & 69 & 72 \\ 9 & 45 & 48 & 68 & 84 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Szorgalmi feladatok

*1 Számítsuk ki az

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}$$

determináns értékét! Ezt fölhasználva igazoljuk, hogy a $(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2)$ szorzat előáll négy négyzetszám összegeként (azaz $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2$ alakban, ahol z_i az x_i változókban is és az y_i változókban is lineáris, ahol $i = 1, 2, 3, 4$)!

*2 Mutassuk meg, hogy ha egy $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_n[\mathbb{C}]$ mátrix transzponáltja megegyezik a konjugáltjával, akkor a determinánsa valós szám.