9. Házi feladat (határidő: 2015-11-13)

A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Bontsuk fel a $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$ mátrixot elemi mátrixok szorzatára!

2. Mutassuk meg, hogy egy $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_n[\mathbb{R}]$ mátrixra pontosan akkor teljesül az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ összefüggés (azaz ortogonális mátrix), ha sorvektorai ortonormált rendszert alkotnak.

3. Adjuk meg az alábbi mátrix LU-felbontását:
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Oldjuk meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert LU-felbontás segítségével, ahol $\mathbf{A}$ az előző feladatbeli mátrix és $\mathbf{b} = (5, -1, 3, 7)$.

5. Adjuk meg az alábbi mátrix PLU-felbontását:
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

6. Bontsuk fel az alábbi mátrixot egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus (antiszimmetrikus) mátrix összegére!
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

7. Határozzuk meg az $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n$ mátrixot ($n \in \mathbb{N}$)!

8. Határozzuk meg az alábbi mátrix bázisfelbontását!
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 6 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

9. Adjuk meg az előző feladatbeli mátrix egy $\mathrm{r}(\mathbf{A})$ darab diád összegére való felbontását!

10. Legyen $\mathbb{R}^4$ standard bázisa $\mathcal{C}$ és egy alterének bázisa $\mathcal{B} = \{(1,0,1,-1), (1,1,0,0)\}$.

    (a) Írjuk fel az $\mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ áttérési mátrixot!

    (b) Írjuk fel $[\mathbf{v}]_\mathcal{C}$-t ha $[\mathbf{v}]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Gyakorló feladatok

1. Bontsuk fel az alábbi mátrixokat elemi mátrixok szorzatára, ha lehetséges:

   (a) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

2. Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_p$ feletti $n \times n$-es invertálható mátrixok számát!

3. Adjuk meg az alábbi mátrix LU-felbontását!
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$
   Ennek segítségével oldjuk meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszert, ahol $\mathbf{b} = (3, -4, -3)$ oszlopvektor.

4. Adjuk meg az alábbi mátrix LU-felbontását, majd azt felhasználva inverzét!
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Adjuk meg az alábbi mátrix PLU-felbontását!
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Mutassuk meg, hogy ha egy $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixra $A^k = 0$, akkor $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ invertálható!

7. Adjuk meg az összes 2×2-es $\mathbb{Z}_2$ feletti reguláris mátrixot. Mutassuk meg, hogy mindegyik mátrix valamely véges hatványa már az egységmátrix. Mi a legkisebb ilyen hatvány?

Szorgalmi feladatok

*1 Mutassuk meg, hogy ha az $n \times n$ -es valós $\mathbf{A}$ mátrix az összes $n \times n$-es valós mátrixszal felcserélhető akkor $\mathbf{A}$ skalármátrix, azaz diagonális mátrix, és a diagonális elemek azonosak.

*2 Számítsuk ki az $\mathbf{A}^{100}$ mátrixot, ha
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 6 & -5 & 3 & 6 \\ -2 & 2 & 2 & -2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 5 & -4 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & -5 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$