8. Házi feladat (határidő: 2015-11-06)

A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Legyenek megadva az alábbi mátrixok:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & 2+i \\ 2 & 3-i \\ 3 & 4i \end{bmatrix}.$$

   Végezzük el az alábbi műveleteket, ha lehet:
   $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $\mathbf{AB}$, $\mathbf{AC}$, $\mathbf{D}^2$, $\mathbf{DD}^T$, $\overline{\mathbf{D}}$, $\mathbf{BC}$.

2. Keressünk olyan $n \times n$-es $\mathbf{C}$ valós mátrixokat, melyekre: $\mathbf{C}^2 = \mathbf{C}$, de $\mathbf{C} \neq \mathbf{O}$ és $\mathbf{C} \neq \mathbf{E}$.

3. Számítsuk ki az $\mathbf{AB} + 3\mathbf{C}$ mátrixot közönséges mátrixműveletekkel és blokkmátrixként számolva is, ha

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right], \mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 1 & 5 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right], \mathbf{C} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ \hline 1 & 1 \end{array}\right].$$

4. Legyen az $\mathbf{A}_{m\times n}$ mátrix redukált lépcsős alakja (a zérussorok elhagyása után) $[\mathbf{I}_r|\mathbf{B}]$, ahol r a mátrix rangja. Írjuk fel az $\mathbf{A}$ együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszer összes megoldását mátrixszorzat alakban!

5. Elemi sorműveletekkel számítsuk ki a következő mátrix inverzét!

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Melyik oldalról kell megszorozni és milyen permutációs mátrixszal az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

   mátrixot, hogy a

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   mátrixot kapjunk? E permutációs mátrix milyen elemei mátrixok szorzataként írható föl?

7. Mutassuk meg, hogy permutációs mátrix inverze a transzponáltja. Mutassuk meg, hogy ez is permutációs mátrix. Milyen permutációnak felel meg?

8. Legyen $\mathcal{A} := \{(1,0,1),(1,1,1),(1,-1,0)\}$, $\mathcal{B} := \{(1,2,2),(-1,0,1),(1,1,-1)\}$.

   (a) Mutassuk meg, hogy ezek $\mathbb{R}^3$ két bázisa!

   (b) Írjuk fel az $\mathbf{T}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$ áttérési mátrixot!

   (c) Legyen $[\mathbf{v}]_{\mathcal{A}} = (1,1,-1)$ egy $\mathbf{v}$ vektor koordinátavektora az $\mathcal{A}$ bázisban. Mi lesz $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$?

9. Legyen $\mathcal{A} := \{(1,0,-1),(1,1,1),(1,1,0)\}$, $\mathcal{B} := \{(1,1,2),(-1,0,1),(1,1,1)\}$.

   (a) Ellenőrizzük, hogy $\mathbf{T}_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathbf{T}^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$.

   (b) Legyen $xy + z = 0$ egy felület egyenlete a standard bázisban. Mi a felület egyelenlete az $\mathcal{A}$ bázisban?

10. Mikor invertálható egy felső háromszög mátrix? Mutassuk meg, hogy ez is felső hároszög mátrix!

Gyakorló feladatok

1. A *sudoku* egy olyan logikai játék, melyben egy olyan 9×9-es mátrixot kell megadni, melynek ismerjük néhány, de nem minden elemét. A feladat a nem ismert elemek meghatározása. A mátrix 9 darab 3×3-as blokkra van particionálva és eleget tesz annak a feltételnek, hogy minden sorában, minden oszlopában és minden blokkjában az 1-től 9-ig terjedő egészek mindegyike egyszer szerepel. Ez azt jelenti, hogy az egy sorban, egy oszlopban és egy blokkban lévő számok összege mindig 45. Fejezzük ki ezt mátrixműveletekkel, azaz írjunk fel a sudoku tábla $\mathbf{A}$ mátrixát is tartalmazó olyan mátrixegyenleteket, melyeket minden helyesen kitöltött sudoku tábla mátrixa kielégít!

2. *(a)* Mutassuk meg, hogy $\mathbf{AB}$ mátrix oszlopai $\mathbf{Ab}_1, \ldots, \mathbf{Ab}_n$, ha $\mathbf{B}$ oszlopai $\mathbf{b}_1, \ldots \mathbf{b}_n$.

   (b) Mutassuk meg, hogy az $\mathbf{AB}$ mátrix sorai $\mathbf{a}_1\mathbf{B}, \ldots \mathbf{a}_m\mathbf{B}$, ha $\mathbf{A}$ sorai $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$.

   (c) Mutassuk meg, hogy egy mátrixot az i-edik standard bázisvektorral szorozzuk jobbról (balról), akkor a mátrix i-edik oszlopát (sorát) kapjuk.

3. Tetszőleges $n > 1$-re adjunk meg olyan $n \times n$-es $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ valós mátrixokat, melyekre $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$, de $\mathbf{BA} \neq \mathbf{O}$!

4. Keressünk olyan $n \times n$-es $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ valós mátrixokat, melyekre:

   (a) van olyan k természetes szám, hogy $\mathbf{A}^k = \mathbf{E}$, de $\mathbf{A} \notin \{\mathbf{E}, -\mathbf{E}\}$;

   (b) van olyan k természetes szám, hogy $\mathbf{B}^k = \mathbf{O}$, de $\mathbf{B} \neq \mathbf{O}$,

5. Legyenek $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ tetszőleges $n \times n$-es mátrixok. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$ mátrix főátlójában az elemek összege 0!

6. *(a)* Mutassuk meg, hogy $n \times n$-es diagonális mátrixok szorzata is diagonális mátrix, felső háromszög mátrixok szorzata pedig felső háromszög mátrix!

   (b) Mikor invertálható egy diagonális mátrix és mi az inverze?

7. Elemi sorműveletekkel számítsuk ki a következő mátrix inverzét!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

8. Egy $\mathbb{R}^n$-beli $\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n$ vektorrendszer *ortonormált*, ha $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \delta_{i,j}$. Egy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix *ortogonális*, ha $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{A}$ pontosan akkor ortogonális mátrix, ha oszlopvektorai ortonormáltak.

Szorgalmi feladatok

*1 Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Z}_p^n$-ben egy k-dimenziós $\mathcal{W}$ altérre merőleges vektorok $n-k$ dimenziós alteret alkotnak, de ez az altér nem direkt kiegészítője $\mathcal{W}$-nek, metszheti $\mathcal{W}$-t.

*2 Tegyük fel, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix és az $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$ blokkmátrix invertálható. Állítsuk elő $\mathbf{X}$-et egy alsó blokkháromszögmátrix, egy diagonális mátrix és egy felső blokkháromszögmátrix szorzataként! Ennek felhasználásával igazoljuk, hogy ekkor

$$\mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{BYCA}^{-1} & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{BY} \\ -\mathbf{YCA}^{-1} & \mathbf{Y} \end{bmatrix}$$

ahol $\mathbf{Y} = (\mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B})^{-1}$. Igazoljuk, hogy ha $\mathbf{A}$ invertálható, akkor $\mathbf{X}$ pontosan akkor invertálható, ha $\mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B}$ invertálható.