7. Házi feladat (határidő: 2015-10-30)

A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}^{n^2}$-ben a valós felsőháromszög mátrixok alteret alkotnak. Adjunk meg benne bázist és adjuk meg az altér dimenzióját!

2. Függetlenek-e az $(1,2,-1,0)$, $(1,1,2,1)$, $(2,0,1,3)$ és az $(1,0,-4,1)$ vektorok? Ha nem, akkor adjuk meg közülük az általuk generált altér egy bázisát és fejezzük ki segítségükkel a többi vektort. Írjuk fel mindegyik vektor koordinátavektorát e bázisra nézve!

3. Állítsuk elő a $\mathbf{v}_1 = (1,0,1,1)$, $\mathbf{v}_2 = (2,1,-1,3)$ és $\mathbf{v}_3 = (0,1,-2,-1)$ vektorok lineáris kombinációjaként az $\mathbf{a} = (0,-1,3,-1)$, $\mathbf{b} = (1,1,0,1)$ és $\mathbf{c} = (3,2,-2,3)$ vektorok közül azokat, amelyeket lehet! (Használjunk szimultán egyenletrendszert!)

4. Alteret, affin-alteret alkotnak-e $\mathbb{R}^3$-ben az alábbi részhalmazok? Amelyik altér, annak adjuk meg egy bázisát is!

   (a) $\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{v}| = 1\}$

   (b) $\{(x,y,z) \mid x + 2y + z = 0\}$

   (c) $\{(x,y,z) \mid x + 2y + z = 1\}$

5. Tekintsük a $\mathcal{B} = \{(1,3,-1),\ (0,1,1),\ (2,-1,0)\}$ bázist $\mathbb{R}^3$-ben. Melyik az a $\mathbf{v}$ vektor, amelynek $\mathcal{B}$ szerinti koordinátavektora $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (1,2,-1)$, és mi a $\mathbf{w} = (3,0,-3)$ vektor koordinátavektora $\mathcal{B}$ szerint?

6. Adjuk meg az alábbi mátrix *négy kitüntetett alterének* egy-egy bázisát!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

7. Válasszunk ki a következő vektorhalmazból maximális független rendszert, és fejezzük ki a többi vektort ezek lineáris kombinációjaként! $\{(0,1,1,-1), (1,2,1,0), (1,0,-1,2), (-2,-1,1,-3)\}$

8. Adjuk meg az $\mathcal{U}$ merőleges kiegészítő alterének egy bázisát a $\mathcal{V}$-ben, ha $\mathcal{U} = \langle(1,2,-1)\rangle$ és $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$.

9. Hány $n-1$ dimenziós altere van $\mathbb{Z}_p^n$-nek (p prím)?

10. Adjuk meg az

$$\begin{aligned} x - y + z &= -2 \\ 2x + y + 3z &= 1 \\ x + 2y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

egyenletrendszer sortérbe eső egyetlen megoldását, és ennek segítségével írjuk fel az összes megoldást!

Gyakorló feladatok

1. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{C}^{n^2}$-ben a komplex felsőháromszög mátrixok alteret alkotnak. Adjunk meg benne bázist és adjuk meg az altér dimenzióját is.

2. Mutassuk meg, hogy alkalmas N-re az alábbiak $\mathbb{R}^N$-ben alteret alkotnak. Adjunk meg bennük bázist és adjuk meg az altér $\mathbb{R}$ feletti dimenzióját.

   (a) a komplex számokhoz tartozó helyvektorok a valós síkon.

   (b) $n \times n$-es valós szimmetrikus mátrixok.

   (c) $n \times n$-es valós 0 nyomú mátrixok.

   (d) $n \times n$-es komplex 0 nyomú mátrixok.

   (e) Valós együtthatós legfeljebb n-edfokú polinomok, melyek páros függvények: ezen polinomok együttható vektorai $\mathbb{R}^{n+1}$-ben.

3. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{R}^n$-ben valódi altér dimenziója kisebb, mint n.

4. Mutassuk meg, hogy alterek metszete altér, de uniója nem feltétlen. Az unió pontosan akkor lesz altér, ha a két altér egymást tartalmazza.

5. Mutassuk meg, hogy két altér $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2 \leq \mathbb{R}^n$, vektorai által generált altér dimenziója: $\dim \mathcal{W}_1 + \dim \mathcal{W}_2 - \dim(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2)$.

6. Mutassuk meg, hogy ha bizonyos $\mathbb{R}^n$-beli vektorok összefüggőek, akkor nem feltétlenül fejezhető ki mindegyik vektor a többiből.

7. *(a)* Mutassuk meg, hogy egy $m \times n$-es valós mátrix oszlopvektorai összes valós együtthatós lineáris kombinációi alteret alkotnak $\mathbb{R}^m$-ben

   (b) Mutassuk meg, hogy ebben bázis az oszlopvektorok egy maximális független rendszere!

8. Függetlenek-e az alábbi vektrorendszerek. Ha nem, akkor adjuk meg közülük az általuk generált altér egy bázisát és fejezzük ki belőlük a többi vektort. Adjuk meg minden vektornak a bázisra vonatkozó koordinátavektorát is.

   (a) $\{(1, 3, 2, 1), (2, 1, -1, 0), (-1, 2, 3, 1)\}$

   (b) $\{(0, 1, 3), (2, 1, -1), (4, 3, 1)\}$

9. Altere-e, affin altere-e $\mathbb{R}^3$-nak *(a)* egy origón átmenő sík helyvektorai? *(b)* egy origón át nem menő sík helyvektorai!

10. Adjuk meg az alábbi mátrix sorterének, oszlopterének és nullterének egy-egy bázisát!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

11. Válasszunk ki a következő vektorhalmazból maximális független rendszert, és fejezzük ki a többi vektort ezek lineáris kombinációjaként! $\{(1, 2, 3), (-2, -4, -6), (1, 1, 1), (0, 1, 2), (2, 1, 0)\}$

12. Adjuk meg az $\mathcal{U}$ merőleges kiegészítő alterének egy bázisát a $\mathcal{V}$-ben, ha $\mathcal{U} = \langle(1, 2, 0, 1), (3, 1, -1, 1), (1, -3, -1, -1)\rangle$, $\mathcal{V} = \mathbb{R}^4$.

13. Legyen p prím. Hány k dimenziós altere van $\mathbb{Z}_p^n$-nek $(k = 0, 1, \ldots, n)$?

Szorgalmi feladatok

*1 Jelölje $\mathbb{R}^\infty$ azoknak a végtelen valós sorozatoknak a halmazát, melyekben véges sok tag nem nulla. E sorozatokat $\mathbb{R}^\infty$ vektorainak nevezzük. Köztük természetes módon definiálható az összeadás és a valós számmal való szorzás. Végtelen sok vektor akkor független, ha minden véges részrendszere független.

   (a) Adjunk meg $\mathbb{R}^\infty$-ben maximális független vektorrendszert!

   (b) Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}^\infty$-nek van olyan valódi altere, melynek bázisa megszámlálhatóan végtelen sok vektorból áll.

*2 Mutassuk meg, hogy minden egész elemű négyzetes mátrix megadott műveletekkel olyan alakra hozható, hogy csak a főátlóban...