6. Házi feladat (határidő: 2015-10-26)

A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Határozzuk meg a $x+3y+z=2$ és $x+2y+2z=5$ egyenletű síkok metszetét! Ha a metszet egyenes, adjuk meg az egyenes explicit egyenletét vektorosan és koordinátánként is!

2. Adjuk meg a következő egyenletrendszer összes megoldását:
$$\begin{aligned} x+\ \ y+\ \ z&=4\\ -x+\ \ y-\ \ z&=2\\ 2x+\ \ y+2z&=1\\ 4x+4y+4z&=1 \end{aligned}$$

3. Adjuk meg a következő egyenletrendszer összes megoldását:
$$\begin{aligned} 7x+14y-21z&=7\\ x+\ \ 2y-\ \ 3z&=1\\ 5x+10y+15z&=5\\ 3x+\ \ 6y-\ \ 9z&=3 \end{aligned}$$
(a) Mit jelent az egyenletrendszer megoldása a sormodellben? *(b)* Ki tudunk-e választani az eredeti egyenletek közül kevesebbet, melyek ugyanezt a megoldást adják? Melyeket? *(c)* Mit jelent az egyenletrendszer megoldása az oszlopmodellben?

4. Van-e olyan lineáris egyenletrendszer, amelynek: *(a)* 5 egyenlete, 6 ismeretlenje van és egyértelmű a megoldása; *(b)* 6 egyenlete, 5 ismeretlenje van, és egyértelmű a megoldása; *(c)* 5 egyenlete, 6 ismeretlenje van és nincs megoldása; *(d)* 5 egyenlete, 5 ismeretlenje van és pontosan 5 megoldása van? Van-e ilyen valós egyenletrendszer? Van-e ilyen véges test feletti egyenletrendszer?

5. Legyen
$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&3\\1&3&-1\end{bmatrix}\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}-4\\0\\4\end{bmatrix}$$
Határozza meg az $\mathbf{A}$ mátrix és az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ kibővített mátrix rangját $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$ és $\mathbb{R}$ felett! Mit mondhatunk az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ kibővített mátrixú lineáris egyenletrendszer megoldhatóságáról mindhárom esetben!

6. Az alábbi mátrixok közül melyek vannak lépcsős, illetve redukált lépcsős alakban? A redukált lépcsőseknél írjuk fel a mátrixhoz tartozó lineáris egyenletrendszer megoldását, vektoros alakban is!
$$(a)\ \left[\begin{array}{cccc|c}2&0&1&1&3\\0&1&0&1&1\\0&0&0&0&2\end{array}\right]\quad (b)\ \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\end{array}\right]$$
$$(c)\ \left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&1&0\\0&1&1&2&0\\1&0&0&0&0\end{array}\right]\quad (d)\ \left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&2&1\\0&0&1&3&2\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$
$$(e)\ \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&2&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

7. Az a és b paraméterek értékétől függően hány megoldása van a következő mátrixhoz tartozó egyenletrendszereknek?
$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\-1&1&1&b\\0&2&a&1\end{array}\right]$$

8. Oldjuk meg a következő szimultán egyenletrendszert!
$$\begin{aligned} 2x+3y&=1 & 2u+3v&=3 & 2a+3b&=0\\ 4x+6y&=2 & 4u+6v&=0 & 4a+6b&=0 \end{aligned}$$

9. Adjuk meg a $2x-y+z=1$ sík explicit és implicit egyenletét, illetve egynletrendszerét! Oldjuk meg az egyenletet, mint egy egy egyenletből álló egyenletrendszert, és írjuk fel a megoldást vektorosan!

10. Határozzuk meg a következő mátrix rangját!
$$\begin{bmatrix}1&2i&1+2i\\3&i&3-i\\4i&-3&-1+4i\end{bmatrix}$$

Gyakorló feladatok

1. Adjuk meg a következő egyenletrendszer összes megoldását:

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 2 \\ 3x - y + 2z &= 7 \\ x - z &= -2 \\ 2x + y + z &= 7 \end{aligned}$$

2. Az a és b értékétől függően hány megoldása van az alábbi egyenletrendszernek?

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 4 \\ x + 2y - z &= -3 \\ x - y + 2z &= a \\ x + by + z &= 3 \end{aligned}$$

3. Legyen adva egy k egyenletből és n ismeretlenből álló racionális együtthatós lineáris egyenletrendszer! Döntsük el, melyek igazak az alábbi következtetésk közül: *(a)* Ha $k \leq n$, akkor az egyenletrenszernek van megoldása. *(b)* Ha $k > n$, akkor az egyenletnek nincs megoldása. *(c)* Ha $k < n$ és az egyenletrendszernek van megoldása, akkor végtelen sok megoldása is van. *(d)* Ha $k > n$ és az egyenletrendszernek van megoldśa, akkor csak egy megoldása van. *(e)* Ha létezik valós megoldás, akkor létezik (csupa) racionális megoldás is. *(f)* Ha bármely $k-1$ egyenletet kiválasztva az így kapott egyenletrendszernek van megoldása, akkor az eredetinek is van megoldása.

4. Határozzuk meg a $2x - y + 3z = 3$, $x + y + z = 4$, $3y - z = 5$ egyenletű síkok metszetét! Ha a metszet egyenes, adjuk meg az egyenes explicit egyenletét vektorosan és koordinátánként is!

5. Oldjuk meg a következő szimultán egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 2 \qquad & 2u - 3v &= 5 \qquad & 2a - 3b &= 0 \\ 4x - 6y &= 4 \qquad & 4u - 6v &= 0 \qquad & 4a - 6b &= 0 \end{aligned}$$

Szorgalmi feladatok

*1 Bizonyítsuk be, hogy minden n-re az az 1 főegyütthatós polinom, amelynek gyökei épp a primitív n-edik egységgyökök, egész együtthatós!

*2 Mutassuk meg, hogy, Z_m gyűrűben lehetséges, hogy egy felette vett egyvátozós nem konstans polinomnak több gyöke van, mint a foka!