5. Házi feladat (határidő: 2015-10-16)

A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Határozzuk meg az $x^3 - x^2 - 8x + 12$ polinom gyökeit a Rolle-féle gyöktétel segítségével!
2. Határozzuk meg az $x^3 - x^2 - 8x + 12$ polinom gyökeit a Cardano-formula segítségével!
3. Bontsuk fel a
$$2x^6 - x^5 - 9x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 5x + 5$$
polinomot irreducibilis polinomok szorzatára $\mathbb{Q}[x]$-ben! Határozzuk meg e polinom gyökeinek összegét és szorzatát!
4. Bontsuk fel az $x^7 + 1$ polinomot irreducibilis polinomok szorzatára $\mathbb{Q}[x]$-ben! Határozzuk meg e polinom gyökeinek összegét és szorzatát!
5. Bizonyítsuk be, hogy ha p prím, akkor az $x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1$ polinom irreducibilis a racionális számtest felett és gyökei éppen a primitív p-edik egységgyökök!
6. *a)* Adjuk meg azt a legalacsonyabbfokú $p(x)$ polinomot, amelyre $k = 1, 2, 3, 4$ esetén $p(x_k) = y_k$:

x_k	-1	0	1	2
y_k	-10	-5	0	5

   b) Bontsa fel a polinomot gyöktényezők szorzatára.

   c) Adja meg a gyökök összegét és szorzatát.
7. Bizonyítsuk be, hogy ha F véges test, akkor minden $f : F \to F$ függvény polinommal adható meg!
8. Legyen a, b, c az $x^3 - x^2 + 3z + 6$ polinom három gyöke $\mathbb{C}$-ben. Határozzuk meg a következő kifejezések értékét:

   a) $a + b + c$

   b) abc

   c) $a^2 + b^2 + c^2$
9. *a)* Mutassunk 3-adfokú $\mathbb{Z}[x]$-beli polinomot, amelynek nincs $\mathbb{Z}$-ben gyöke, de nem irreducibilis $\mathbb{Z}[x]$-ben.

   b) Mutassunk $\mathbb{R}[x]$-beli negyedfokú polinomot, amelynek nincs $\mathbb{R}$-ben gyöke, de nem irreducibilis $\mathbb{R}[x]$-ben.
10. Fejezzük ki az $x^3 + y^3 + z^3$ polinomot x, y, z elemi szimmetrikus polinomjainak polinomjaként. Használjuk a főtag kiköszöbölési algoritmust.

Gyakorló feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy egy F test feletti legfeljebb 3-adfokú polinomnak, ha nincs F-ben gyöke, akkor irreducibilis $F[x]$-ben.
2. Mutassuk meg, hogy egy F test feletti $F[x]$ polinomgyűrűben minden prímtulajdonságű polinom irreducibilis.
3. Mutassuk meg, hogy a Schönemann-Eisenstein kritérium az együtthatókra fordított sorrendben is alkalmazható!
4. Mutassuk meg, hogy ha egy 1 főegyütthatós, egész együtthatós polinom irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ felett, akkor $\mathbb{Z}$ felett is irreducibilis.
5. Mutassuk meg, hogy egy racionális együtthatós, irreducibilis polinomnak nem lehet $\mathbb{C}$-ben többszörös gyöke.
6. Egy $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ polinom pontosan akkor irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$ felett, ha $p(x + \alpha)$ irreducibilis, ahol $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Szorgalmi feladatok

*1 Bizonyítsuk be, hogy ha $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ komplex együtthatós polinom, akkor gyökeinek abszolút értéke legfeljebb $1 + \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|$.

*2 Azt mondjuk, hogy egy komplex szám **algebrai egész**, ha gyöke egy 1 főegyütthatós egész együtthatós polinomnak. Mutassuk meg, hogy ha egy racionális szám algebrai egész, akkor az egész szám.