4. Házi feladat (határidő: 2015-10-09)

A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Osszuk el maradékosan az $x^5 - 2x^2 + 4$ polinomot *a)* $x + 1$-gyel *b)* $(x + 1)^2$-nel *c)* $(x^2 - 1)$-gyel!
2. Keressük meg az $2x^6 - x^5 - 9x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 5x + 5$ polinom összes gyökét! Bontsuk fel e polinomot irreducibilis polinomok szorzatára $\mathbb{C}[x]$-ben és $\mathbb{R}[x]$-ben!
3. Oldjuk meg az $z^6 - z^3 + 1 - i = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán!
4. Adjuk meg az alábbi polinomok gyöktényezős alakját! *a)* $x^n - 1$ *b)* $x^{2n} - x^{2n-1} + ... + x^2 - x + 1$
5. Adjuk meg azt a legalacsonyabbfokú egyfőegyütthatós

   a) komplex együtthatós

   b) valós együtthatós polinomot,

   melynek i kétszeres 1 háromszoros gyöke!
6. Határozzuk meg $x^n - 1$ és $x^k - 1$ közös gyökeit! Mutassuk meg, hogy az ezekhez tartozó gyöktényezők szorzata $x^d - 1$, ahol $d = (n, k)$!
7. Határozzunk meg a $p(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ és $q(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ polinomok *(a)* legnagyobb közös osztóját euklideszi algoritmussal és *(b)* kibővített euklideszi algoritmussal adjunk meg olyan $\alpha(x)$ és $\beta(x)$ polinomot, hogy $\alpha(x)p(x) + \beta(x)q(x) = (p(x), q(x))$ legyen.
8. Határozzuk meg az összes irreducibilis másod- és harmadfokú polinomot GF(2) felett! Irreducibilisek-e ezek $\mathbb{Z}$ felett is?
9. A Horner-séma alkalmazásával *a)* osszuk el maradékosan a $p(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ polinomot a $q(x) = x + 1$ polinommal, és *b)* írjuk át $p(x)$-et $x + 1$ polinomjaként (azaz $x + 1$ hatványaival)!
10. Határozzuk meg az a együtthatót úgy, hogy -1 legalább kétszeres gyöke legyen az $x^5 - ax^2 - ax + 1$ polinomnak!

Gyakorló feladatok

1. Mit ad maradékul a $3x^{21} - 2x^{14} + 5x^9 - 7$ polinom $(x - i)$-vel, $(x + i)$-vel, $x^2 + 1$-gyel illetve $(x - 1)^3$-nel osztva?
2. Határozzuk meg az $(x - 2)^2(x + i)^5(x - 3)(x - 4)^2$ és $(x - 2)(x + i)^2(x - 3)^3$ polinomok legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét!
3. Keressük meg az alábbi polinomok összes gyökeit! Bontsuk fel a polinomokat irreducibilis polinomok szorzatára $\mathbb{C}[x]$-ben, $\mathbb{R}[x]$-ben.

   a) $2x^6 + x^5 - 5x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 3x + 3$

   b) $x^5 + 1$.
4. Milyen feltételek mellett osztható az $x^3 + px + q$ polinom az $x^2 + rx - 1$ polinommal?
5. Adjuk meg az alábbi polinomok gyöktényezős alakját!

   a) $x^3 - 1$

   b) $x^n + 1$

   c) $x^2 + x + 1$
6. Mutassuk meg, hogy, minden páratlan fokú valós együtthatós polinomnak van valós gyöke.
7. Mutassuk meg, hogy nincs olyan valós együtthatós p polinom, melyre minden x esetén $p(x) = \sin(x)$.
8. A Horner-elrendezés segítségével írjuk fel x hatványai szerint a $p(x) = (x - 3)^4 + 4(x - 3)^3 + 6(x - 3)^2 + 10(x - 3) + 20$ polinomot!

Szorgalmi feladatok

*1 Bizonyítsuk be, hogy az egész együtthatós $p(x)$ polinomnak nincs egész gyöke, ha $p(0)$ és $p(1)$ páratlan szám!

*2 Mutassuk meg, hogy van akármilyen magas fokú egész együtthatós polinom, amely irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.