3. Házi feladat (határidő: 2015-10-02)

A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Bizonyítsuk be a polinomiális tételt:
$$(a_1 + ... + a_k)^n = \sum_{i_1+...+i_k=n} \frac{n!}{i_1!...i_k!} a_1^{i_1}...a_k^{i_k}.$$
2. Határozzuk meg az
$$\frac{(1+2015i)^{2015}}{(1-2015i)^{2015}}$$
komplex szám abszolút értékét!
3. Oldjuk meg a komplex számok halmazán az
$$z^2 + 2iz + 1 + i = 0$$
egyenletet!
4. Számítsuk ki a komplex négyzetgyökeit a $-5-6i$ komplex számnak trigonometrikus alak használata nélkül!
5. Mi a geometriai jelentése annak, hogy egy komplex számot megszorzunk $(1+i)$-vel?
6. Hozzuk a $\sin 12° - i\cos 12°$ számot trigonometrikus alakra!
7. Számítsuk ki $-243i$ összes ötödik gyökét trigonometrikus alakban!
8. Adjuk meg $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvényként (a szokásos algebrai műveletek és a konjugálás segítségével) az alábbi síktranszformációt: $1+i$ körüli $60°$-os forgatás!
9. Legyen $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\}$ az n-edik egységgyökök halmaza adott $n \geq 1$ egészre. Számítsuk ki a
$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^k,$$
összeget, ahol $k \in \mathbb{N}_0$.
10. Adjuk meg *a)* a primitív 5-ödik *b)* a primitív 8-adik egységgyökök összegét és szorzatát!

Gyakorló feladatok

1. Bizonyísuk be, hogy az $F = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in Q\}$ halmaz test!
2. Adjuk meg az alábbi komplex számok algebrai alakját!

   a) $(3-4i)(7+8i)$

   b) $(3-4i)/(2-i)$

   c) i^{1994}

   d) $(1+i)^9$
3. Mi a mértani helye a síkon azoknak a pontoknak, amelyeknek megfelelő z komplex számokra:

   a) $|z-5+i| = 2$

   b) $|z-i| = |z+i|$

   c) $|(z-3+4i)/(z-i)| \geq 1$

   d) $|z| = 3iz$

   e) $z + \overline{z} < 4$

   f) $2z + 5 = 2\overline{z}$
4. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán:

   a) $z^2 + 1 = 0$

   b) $z^2 = -12$

   c) $z^2 + 3z + 4 = 0$

   d) $z^2 = i$
5. Hozzuk trigonometrikus alakra:

   a) -8

   b) $-\sqrt{3}/2 + 1/2i$

   c) $1 - itg(\alpha)$
6. Számítsuk ki

   a) a $(-\sqrt{3}+i)^{-9}$ komplex szám értékét és hozzuk az eredményt algebrai alakra!

   b) a $z^6 - z^3 + 1 - i = 0$ egyenlet öszes megoldását!

   c) a $\overline{z} = z^n$ $n \in N$ összes megoldását!

7. *a)* Tetszőleges n természetes számra számítsuk ki zárt alakban az $(1+i)^n$ értékét!

   b) Adjuk meg zárt alakban az

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots$$

   összeg értékét!

   c) Adjunk képletet $\cos nx$-re $\cos x$ és $\sin x$ függvényében, ahol $n \in \mathbb{N}^+$!

8. Adjuk meg $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvényként (a szokásos algebrai műveletek és a konjugálás segítségével) az alábbi síktranszformációkat!

   a) origó körüli α szögű forgatás!

   b) Az x illetve az y tengelyre való tükrözés!

   c) Az origón és a $2i+1$ ponton átmenő tengelyre való tükrözés.

9. Adjuk meg annak a négyzetnek a másik két csúcsát, melynek két átellenes csúcsát két adott komplex szám z_1 és z_2 alkotják!

10. Tegyük fel, hogy két egységgyök összege egységnyi hosszúságú!

    a) Milyen szöget zárnak be egymással?

    b) Mutassuk meg, hogy az összeg is egységgyök!

11. Gyűrűt, illetve testet alkotnak-e a valós számpárok a komponensenkénti összeadásra és szorzásra nézve. Van-e egységlem és nullelem?

12. Mutassuk meg, hogy egy R gyűrűben $0a = 0$ és $(-a)b = -(ab)$.

Szorgalmi feladatok

*1 Mutassuk meg, hogy ha $(k,n) = 1$, akkor egy primitív k-adik és egy primitív n-edik egységgyök szorzata primitív kn-edik egységgyök.

Mutassuk meg, hogy minden primitív kn-edik egységgyök előáll egy primitív k-adik és egy primitív n-edik egységyök szorzataként ha $(k,n) = 1$, és ez az előállítás egyételmű.

*2 Legyen ε egy n-edik egységgyök. Számítsuk ki az $1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \dots + n\varepsilon^{n-1}$ összeget.

*3 Mutassuk meg, hogy ha $z + \frac{1}{z} = 2\cos\alpha$, akkor $z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\alpha$, ahol $z \in \mathbb{C}$ és $n \in \mathbb{Z}$.