1. Házi feladat (határidő: 2015-09-18)

A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Mely halmazok jólrendezett halmazok az alábbiak közül? *(a)* páros számok, *(b)* pozitív páros számok, *(c)* nemnegatív racionális számok, *(d)* a $[0,1]$ intervallumba eső számok, *(e)* egész számok négyzetei, *(f)* egész számok köbei.
2. Igazoljuk, vagy adjunk ellenpéldát! *(a)* két racionális szám összege racionális, *(b)* egy racionális és egy irracionális szám összege irracionális, *(c)* két irracionális szám összege irracionális.
3. Mennyi az értéke a következő kifejezéseknek? *(a)* $\lceil \lfloor \frac{3}{4} \rfloor + \lfloor -\frac{3}{4} \rfloor \rceil$, *(b)* $\lfloor \lceil \frac{3}{4} \rceil + \lceil -\frac{3}{4} \rceil \rfloor$, *(c)* $\{\frac{7}{4}\} + \{-\frac{7}{4}\} + \{-1\}$, *(d)* $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$ $(x \in \mathbb{R})$
4. Hány olyan n-hosszú 0-1-sorozat van, amelyben nincs két 0 egymás mellett?
5. Bizonyítsuk teljes indukcióval!
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
6. Bizonyítsuk be, hogy $n \in \mathbb{Z}$ esetén $\frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} \in \mathbb{Z}$.
7. Legyen $x \in \mathbb{R}^+$. Mutassuk meg, hogy az x-nél nem nagyobb, d-vel osztható pozitív egészek száma $\lfloor \frac{x}{d} \rfloor$.
8. Adjuk meg 101100111000_2 és 43210_5 értékét 10-es számrendszerben (Horner-módszerrel), és 3333 bináris, oktális, hexadecimális, valamint 5-ös számrendszerbeli alakját (ismételt maradékos osztásokkal)!
9. Határozzuk meg euklideszi algoritmussal $(324, 276)$ értékét, és keressünk olyan x és y számot, melyre $324x + 276y = (324, 276)$.
10. Oldjuk meg a $248x + 312y = 8000$ diofantoszi egyenletet! Hány 248€ és hány 312€ értékű árut vásároltunk, ha épp 8000€-t fizettünk?

Gyakorló feladatok

1. Igazoljuk, hogy *(a)* $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor 2x \rfloor$ *(b)* $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$
2. Határozzuk meg az első n Fibonacci-szám összegét!
3. Kiterjeszthető-e a Fibonacci-sorozat negatív indexű tagokkal? Hogyan?
4. Legyen $g_n = g_{n-1} + g_{n-2}$, $g_0 = a$, $g_1 = b$ (általánosított Fibonacci-sorozat). Igazoljuk, hogy $g_n = af_{n-1} + bf_n$.
5. Mutassuk meg, hogy ha a és b páratlan természetes számok, és $b \nmid a$, akkor van olyan q és r egész, hogy $a = bq + r$, $|r| < b$ és r páratlan.
6. Bizonyítsuk teljes indukcióval a következő összefüggéseket!

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$,

   (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$

   (c) $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$, ahol $[f_n]$ a Fibonacci-sorozat.
7. Bizonyítsuk be az alábbi oszthatóságokat!
$$3 \mid n^3 - n \quad (n \in \mathbb{Z})$$
$$5 \mid n^5 - n, \text{ valójában } 30 \mid n^5 - n \quad (n \in \mathbb{Z})$$
$$120 \mid n^5 - 5n^3 + 4n \quad (n \in \mathbb{Z})$$
8. Hány olyan 400-nál kisebb pozitív egész szám van, mely *(a)* nem osztható a 2, 3, 5 számok egyikével sem, *(b)* osztható 6-tal, de nem osztható 5-tel.
9. Igazoljuk, hogy $f_{n+m+1} = f_n f_m + f_{n+1} f_{m+1}$ $(n, m \in \mathbb{N}_0)$.
10. Hány olyan *(a)* részhalmaza van az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaznak, melyben nincs két szomszédos szám? *(b)* n-hosszú sorozat képezhető az 1, 2, 3, 4 számokból, melyek 1-gyel kezdődnek, és minden szám pontosan 1-gyel különbözik az előzőtől?

11. Mennyivel egyenlő az alábbi n törtvonalat tartalmazó tört:

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{1+1}}}}$$

12. Igazoljuk, hogy az egészek közti összeadás és szorzás művelet eredményének paritása csak a összeadandók illetve a szorzandók paritásától függ. Készítsünk két művelettáblát (pl. a páros számokat 0-val, a páratlanokat 1-gyel jelölve).

13. Határozzuk meg euklideszi algoritmussal $(3240, 2766)$ értékét, és keressünk olyan x és y számot, melyre $3240x + 2766y = (3240, 2766)$.

14. Oldjuk meg a $128x + 200y = 8000$ diofantoszi egyenletet! Hány 128€ és hány 200€ értékű árut vásároltunk, ha épp 8000€-t fizettünk?

Szorgalmi feladatok

*1 Dirichlet approximációs tételét használva mutassuk meg, hogy ha x irracionális, akkor végtelen sok olyan b egész szám szám létezik, melyhez van olyan a egész szám, hogy $|x - \frac{a}{b}| < \frac{1}{b^2}$.

*2 Igazoljuk teljes indukcióval:

(a) Egy síkbeli tartományt n darab egyenessel részekre osztunk. Mutassuk meg, hogy az így kapott „térkép” két színnel színezhető úgy, hogy a közös oldallal rendelkező részek különböző színűek legyenek.

(b) Egy országban úgy építenek autópályákat, hogy mindegyik autópálya egyenes, egyik kereszteződésben sem találkozik kettőnél több út, és minden kereszteződésben az egyik út a másik fölött halad. Mutassuk meg, hogy bármely ilyen úthálózatban elérhető az, hogy minden úton felváltva alul majd felül haladjunk át a kereszteződésen.

*3 A NIM nevű játékot néhány kupac gyufaszállal játsza két játékos. Felváltva elvesznek néhány (legalább egy, de akár az összes) gyufaszálat az egyik kupacból. Az nyer, akié az utolsó gyufaszál. Adott méretű kupacok mellett melyik játékosnak van nyerő stratégiája? [Útmutatás: írjuk fel a kupacok méretét binárisan, majd e számokat írjuk egymás alá helyiérték szerint. Igazoljuk, hogy egy játékosnak nyerő pozíciója van, ha minden helyiértéken páros az 1-esek száma.]