4. MAT A3 vizsga. 2014-01-27 Neptun: _ _ _ _ _ _ Név: ______________________ Gyak: KS LE PD

1. *(9)* Egészítsük ki az alábbi állításokat a tanult definíciók, illetve tételek felhasználásával úgy, hogy igazak legyenek!

a) e^z legkisebb periódusa . . .   , értékkészlete . . .

b) Ha $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ ívhosszparaméterezés, akkor $\mathbf{r}''(s) \cdot N(s) = \ldots$

c) Definíció szerint egy D tartomány egyszeresen összefüggő, ha bármely D-beli. . .

d) Legyen D egy . . .

tartomány a komplex síkon. Legyen az $f : D \to \mathbf{C}$ függvény . . .
Ekkor f bármely D-ben haladó sima, zárt görbén vett integrálja 0.

e) Legyen $\mathbf{F} = (M, N, P)$ egy vektor-vektorfüggvény, melynek koordinátafüggvényei . . .

a nyílt D tartományon. A vonalintegrálok alaptétele szerint igaz, hogy . . .

f) Legyen S egy . . .
felület, melynek $\mathbf{n}$ a

és V a felület által határolt tartomány. Ekkor az $\mathbf{F}$ vektormező S felületmenti integráljára igaz az alábbi egyenlőség:

2. *(3)* Számítsuk ki az $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$ függvény felületi integrálját az $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$ paramétertartományhoz tartozó $\mathbf{r}(u, v) = (u^2, -u - v, v^2)$ képlettel paraméterezett felületen.

3. *(6)* Melyek igazak az alábbi állítások közül? Amelyik hamis, azt javítsuk ki egy hasonló, *tanult* állításra!

a) $\mathbf{rot}\,\mathrm{div}\,\mathbf{f} = \mathbf{0}$. ☐

b) $\mathbf{B}'(s) \cdot \mathbf{T}'(s) = -\tau(s)$. ☐

c) $\ddot{\mathbf{r}}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{\mathbf{r}}(t)\mathbf{T}(t) + \kappa(t)\dot{\mathbf{r}}(t)^2\mathbf{N}(t)$. ☐

d) Ha a komplex $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ függvény eleget tesz a Cauchy–Riemann-féle differenciálegyenleteknek a $z_0 = x_0 + iy_0$ pontban, akkor f differenciálható z_0-ban. ☐

e) Ha $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorértékű függvények, akkor $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})' = \mathbf{u}' \times \mathbf{v} + \mathbf{v}' \times \mathbf{u}$. ☐

f) Az $\mathbf{F}$ vektor-vektor függvénynek az $\mathbf{r}(u, v)$ $((u, v) \in T)$ függvénnyel paraméterezett felületen vett felületmenti integrálja $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$-vel párhuzamos normálvektor esetén kiszámítható a következő képlettel:

$$\iint_T \mathbf{r}_u\mathbf{r}_v\mathbf{F}(\mathbf{r})\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$ ☐

4. *(4)* Az alábbi differenciálegyenletnek milyen alakban keressük egy-egy partikuláris megoldását?

(a) $y'' - 2y' + 2y = x^2$,

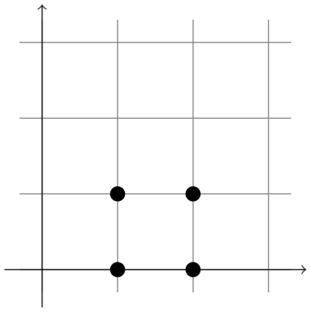
(b) $y'' - 2y' + 2y = xe^x$,

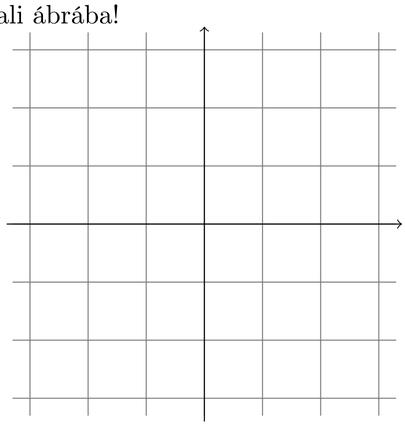
(c) $y'' - 2y' + 2y = e^x + \sin x$,

(d) $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$,

5. *(4)* Az xy-síkbeli egységnégyzet határán – mint zárt görbén – integráljuk meg az $\mathbf{r}(x, y, z) = (yz, xz + x, xy)$ függvényt a görbe pozitív irányítása mellett!

6. *(2)* Rajzoljuk be az $y' = xy + x - 1$ differenciálegyenlet iránymezőjének a kijelölt pontokhoz tartozó egységnyi hosszú vektorait a bal oldali ábrába!





7. *(4)* Oldjuk meg grafikusan az $y' = (y-1)(y+2)$ differenciálegyenletet, azaz rajzoljuk be a fázisegyeneseket, és közöttük/fölöttük/alattuk egy-egy megoldást a fenti jobb oldali ábrába! (csak a megoldások növekedése és konvexitása érdekes)

8. *(5)* Számítsuk ki az alábbi komplex integrált!

$$\int_{|z-i|=3/2} \left(\frac{e^z}{z^2+1} + \sum_{k=-5}^{500} \frac{k^2}{z^k} \right) \mathrm{d}z$$

9. *(3)* Határozzuk meg az $(x, y, z) \to (yz, xz+2yz, xy+y^2)$ függvény potenciálfüggvényét!

10. *(5)* Oldjuk meg a konstansok variálásának módszerével az $xy'' - 2y' = x^3$ differenciálegyenletet, ha tudjuk, hogy a homogén résznek az $y_1 = x^3$ és az $y_2 = 1$ függvények megoldásai!

11. *(5)* Oldjuk meg az $x' = x + 4y$, $y' = 2x - y$ homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszert, majd keressük meg az $x(0) = 3$, $y(0) = 0$ kezdeti feltételeket kielégítő megoldást!