1. MAT A3 vizsga. 2009-01-13 Neptun: _ _ _ _ _ _ Név: ______________________________ Gyak: CsM KS LE

1. *(6)* Definiáljuk a következő fogalmakat!

a) Torzió:

b) k-adfokú differenciálegyenlet:

c) Komplex változós sin függvény:

2. *(3)* Számítsuk ki az $\int_{\mathcal{G}} \frac{1}{z-z_0}\,\mathrm{d}z$ integrál értékét, ha $\mathcal{G}$ egy z_0 közepű R sugarú kör.

3. *(6)* Vezessük le a konstansok variálásának módszerét adó egyenletrendszert az $y'' + ry' + sy = f$ másodrendű lineáris differenciálegyenletre, ahol r, s és f az x függvényei.

4. *(10)* Mi a kapcsolat az A és B állítások között? A lehetséges válaszok: $A \implies B$, $B \implies A$, $A \iff B$, NINCS.

(a) $\mathbf{r}(t)$ egy sima görbe, amelynek sehol sem 0 a görbülete.
A : Az érintő egységvektor deriváltjának abszolút értéke minden pontban megegyezik a görbülettel.
B : A görbe ívhosszparaméteres megadású.

(b) Adva van egy egyszeresen összefüggő nyílt D tartomány, és azon értelmezve vannak a háromváltozós P, Q és R függvények, melyek parciális deriváltjai is léteznek és folytonosak D-n.
A : $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ konzervatív a D tartományon.
B : $P'_y = Q'_x$, $P'_z = R'_x$, $R'_y = Q'_z$ a D tartományon.

(c) A feltételek azonosak az előzővel.
A : Létezik olyan 3-változós f függvény, hogy $\mathbf{F} = (P, Q, R) = \nabla f$ a D tartományon.
B : $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ a D tartományon.

(d) A komplex $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ függvény
A : eleget tesz a Cauchy–Riemann-féle differenciálegyenleteknek a $z_0 = x_0 + iy_0$ pontban.
B : differenciálható a $z_0 = x_0 + iy_0$ pontban;

(e) $f(z)$ komplex függvény a z_0 pont egy 1-sugarú környezetének belsejében
A : differenciálható;
B : akárhányszor differenciálható.

5. *(3)* Fogalmazzuk meg a Stokes-tételt!

6. *(4)* Mutassuk meg a Picard–Lindelöf-tétel feltételeinek ellenőrzésével, hogy az $y'' \sin(yy') = x$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 3$ kezdetiérték-probléma egyértelműen megoldható!

7. *(18 $_{333234}$)* Végezzük el az alábbi számításokat!

a) Határozzuk meg az $\mathbf{r}(t) = (3\cos t, 3\sin t, 4t)$ görbe torzióját a $t = \pi$ paraméterű pontban!

b) Számítsuk ki a $\mathbf{v}(x, y, z) = (2xyz, x + 2y, 2 - yz^2)$ vektormező felületi integrálját befelé mutató felületi normálisokkal annak az egységkockának a határfelületén, melynek oldalai párhuzamosak a koordinátasíkokkal, és két csúcsa $(-1, -1, -1)$ és $(1, 1, 1)$.

c) Tegyük egzakttá a $-y + xy' = 0$ differenciálegyenletet, majd oldjuk meg egzaktként!

d) Az $y'' + 4y' + 13y = x\sin 3x$ és az $y'' + 4y' + 13y = xe^{-2x}\sin 3x$ differenciálegyenletnek milyen alakban keressük egy-egy partikuláris megoldását?

e) Számítsuk ki $\int_{\mathcal{G}} \frac{\cos z}{z^2+\pi z}\,dz$ értékét, ha $\mathcal{G}$ az origó középpontú 4 sugarú kör.

f) Oldjuk meg az $x' = 5x - 3y$, $y' = 3x - y$ homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszert az $x(0) = 1$, $y(0) = 1$ kezdeti feltételekkel, ha tudjuk, hogy az $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix kétszeres multiplicitású sajátértéke 2, egy hozzá tartozó sajátvektora $(1, 1)$.