3. MAT A3 vizsga. 2014-06-17 Neptun: _ _ _ _ _ _ Név: ______________________________

1. *(6)* Egészítsük ki az alábbi állításokat a tanult tételek szerint úgy, hogy igazak legyenek!

a) e^z legkisebb periódusa ... , értékkészlete ...

b) Legyen D egy ...

tartomány a komplex síkon. Legyen az $f : D \to \mathbf{C}$ függvény ...
Ekkor f bármely D-ben haladó sima, zárt görbén vett integrálja 0.

c) Egy $\mathbf{F} = (M, N, P)$ vektormező cirkulációja az...
S felületet határoló $\mathcal{G}$ görbén megegyezik a ...
függvény S felületen vett felületi integráljával, ha $\mathcal{G}$ úgy van irányítva, hogy...

d) Legyen S egy ...
felület, melynek $\mathbf{n}$ a

és V a felület által határolt tartomány. Ekkor az $\mathbf{F}$ vektormező S felületmenti integráljára igaz az alábbi egyenlőség:

2. *(4)* Honnan hová képeznek az alábbi függvények egy $(\Omega, \mathcal{E}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező esetén! A lehetséges válaszok: Ω, $\mathcal{E}$, $\mathbf{R}$, $[0, 1]$, $[0, \infty)$.

Függvény	Honnan képez	Hová képez
P (valószínűség)		
X (valószínűségi változó)		
f (az X sűrűségfüggvénye)		
F (az X eloszlásfüggvénye)		

3. *(5)* Melyek igazak az alábbi állítások közül? Amelyik hamis, azt javítsuk ki egy hasonló, *tanult* állításra!

a) $\mathbf{rot}\,\mathrm{div}\,\mathbf{f} = \mathbf{0}$. ☐

b) $\mathbf{B}'(s) \cdot \mathbf{N}(s) = \tau(s)$. ☐

c) $\ddot{\mathbf{r}}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\dot{\mathbf{r}}(t)|\mathbf{T}(t) + \kappa(t)|\dot{\mathbf{r}}(t)|^2\mathbf{N}(t)$. ☐

d) $|\dot{\mathbf{r}}(t)| = \mathrm{const}$ az értelmezési tartomány minden pontjában pontosan akkor áll fenn, ha $\dot{\mathbf{r}}(t) \perp \mathbf{r}(t)$. ☐

e) Az $\mathbf{F}$ vektor-vektor függvénynek az $\mathbf{r}(u, v)$ $((u, v) \in T)$ függvénnyel paraméterezett felületen vett felületmenti integrálja kiszámítható a következő képlettel:

$$\pm \iint_T (\mathbf{F}(\mathbf{r}) \times \mathbf{r}_u) \cdot \mathbf{r}_v \, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v.$$ ☐

4. *(4)* Az alábbi differenciálegyenletnek milyen alakban keressük egy-egy partikuláris megoldását?

(a) $y'' - y' - 2y = \cos 2x + x$,

(b) $y'' - y' - 2y = e^{-x}$,

(c) $y'' - y' - 2y = xe^{2x}$,

5. *(4)* A Picard–Lindelöf-tétel feltételeinek ellenőrzésével igazoljuk, hogy a következő kezdetiérték-probléma megoldható és a megoldás egyértelmű!

$$y''' = x^2yy'' + \sqrt{y}, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 2$$

6. *(4)* Számítsuk ki $\int_{\mathcal{G}} \frac{e^z}{z(z-2)^2}\,\mathrm{d}z$ értékét, ha $\mathcal{G}$ a $(3 + i)$-középű 2-sugarú kör.

7. *(4)* Az xy-síkbeli egységnégyzet határán – mint zárt görbén – integráljuk meg az $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, x + z, y)$ függvényt a görbe pozitív irányítása mellett!

8. *(5)* Soroljunk fel négy különböző állítást, melyek azzal ekvivalensek, hogy a D tartományon értelmezett $\mathbf{F} = (M, N, P)$ vektormező potenciálos (a potenciálosság definíciója is felsorolható). Külön soroljuk fel azokat a feltételeket, melyek fennállása elégséges az ekvivalenciákhoz.

9. *(5)* Tekintsük az $\mathbf{r}(t)$ vektor-skalár függvénnyel megadott görbét. Bizonyítsuk be a görbületére vonatkozó

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\mathbf{T}}(t)|}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|}$$

képletet!

10. *(5)* Oldjuk meg az $x' = x - y$, $y' = 2x + 4y$ homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszert, majd keressük meg az $x(0) = 5$, $y(0) = 0$ kezdeti feltételeket kielégítő megoldást!

11. *(5)* Oldjuk meg az Euler-féle $x^2y'' - 2xy' + 2y = 6x^4$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 2$ kezdetiérték-problémát!