1. MAT A3 vizsga. 2013-01-15 Neptun: _ _ _ _ _ _ Név: ____________________ Gyak: KS LE PD

1. *(3)* Definiáljuk a következő fogalmakat!

a) Reguláris komplex függvény:

b) Ívhosszparaméter:

c) Munka sima görbe mentén:

2. *(3)* Adjuk meg a paraméterezését annak a kúpnak, melynek tengelye az x-tengely, és amelynek félnyílásszöge $\pi/4$.

3. *(3)* Igaz-e, hogy a kísérő triéder egy vektorának ívhossz szerinti deriváltja a triéder egy másik vektorának konstansszorosa? Döntsük el mindhárom esetben, hogy igaz vagy hamis (I/H), amelyik esetben igaz, oda írjuk be azt is, hogy melyiknek hányszorosa!

a) $\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} =$ ☐

b) $\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s} =$ ☐

c) $\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s} =$ ☐

4. *(5)* Soroljunk fel négy különböző állítást, melyek azzal ekvivalensek, hogy a D tartományon értelmezett $\mathbf{F} = (M, N, P)$ vektormező potenciálos (a potenciálosság definíciója is felsorolható). Külön soroljuk fel azokat a feltételeket, melyek fennállása elégséges az ekvivalenciákhoz.

5. *(4)* Az alábbi differenciálegyenletnek milyen alakban keressük egy-egy partikuláris megoldását?

(a) $y'' + y' - 2y = \cos 2x + x$,

(b) $y'' + y' - 2y = xe^{-x}$,

(c) $y'' + y' - 2y = e^{x}$,

(d) $y'' + y' - 2y = xe^{x}$

6. *(6)* Egészítsük ki az alábbi állításokat a tanultak felhasználásával úgy, hogy igazak legyenek! Mindkét állításban használjuk a ∇ szimbólumot!

a) Ha ... fennáll egy ... D tartomány minden pontjában, akkor bármely D-ben haladó sima zárt görbére ...

b) Egy $\mathbf{F} = [M, N, P]$ vektormező cirkulációja az...

S felületet határoló $\mathcal{G}$ görbén megegyezik a ...

függvény S felületen vett felületmenti integráljával, ha $\mathcal{G}$ úgy van irányítva, hogy...

7. *(4)* Tekintsük az $x-y+z=0$ egyenletű felületnek az xz-síkbeli egységnégyzetre emelt hasáb által kivágott részét! Számítsuk ki a felszínét!

8. *(5)* Számítsuk ki az alábbi komplex integrált!
$$\int_{|z|=1} \left(\frac{z-1}{z^2-2z} + \sum_{k=-10}^{50} \frac{k}{z^k} \right) \mathrm{d}z$$

9. *(5)* Oldjuk meg az $x' = x + 3y + 3z$, $y' = 2y + z$, $z' = 2x + z$ homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszert, majd keressük meg az $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 1$ kezdeti feltételeket kielégítő megoldást, ha tudjuk, hogy az $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ mátrix sajátértékei 4, 1, -1, a hozzájuk tartozó egy-egy sajátvektor $(3, 1, 2)$, $(0, 1, -1)$, $(3, 1, -3)$.

10. *(3)* Számítsuk ki az $\displaystyle\int_{|z-a|=R} (z-a)^n$ $(n \in \mathbf{Z},\ n \neq -1)$ integrál értékét!

11. *(4)* A Picard–Lindelöf-tétel feltételeinek ellenőrzésével igazoljuk, hogy a következő kezdetiérték-probléma megoldható és a megoldás egyértelmű!
$$y''' = xyy'y'' + \sqrt{y'}, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 3$$

12. *(5)* Tegyük egzakttá az alábbi differenciálegyenletet, majd oldjuk meg a kezdetiérték-problémát:
$(1 + y^2)\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y = 0$, $y(1) = 1$.