

1. (10) Egészítsük ki az alábbi állításokat a tanult definíciók, illetve tételek szerint úgy, hogy igazak legyenek!

- a) Görbe *torziója* $\mathbf{a}(z) \dots$ egységvektor változási sebességének abszolút értéke -1 - vagy 1 -szerese aszerint, hogy $\mathbf{a}(z) \dots$ deriváltja egyirányú vagy ellenkező irányú $\mathbf{a}(z) \dots$ egységvektorral.
- b) (Stokes-tétel) Legyen $\mathbf{F} = (M, N, P)$ egy vektormező. Legyen S egy \dots felület, melynek \mathcal{G} a határoló görbéje, és amely úgy van irányítva, hogy \dots

Ekkor \mathbf{F} cirkulációja \mathcal{G} -n megegyezik a \dots

függvény S felületen vett felületmenti integráljával, azaz képletben:

- c) Az \mathcal{S} felületdarabnak az xz -síkra eső merőleges vetülete legyen a \mathcal{T} tartomány. Az \mathcal{S} felület az $f(x, y, z) = \text{const}$ implicit függvénnyel van megadva. A $g : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ függvény felületi integrálja:

$$\iint_{\mathcal{S}} d\sigma = \iint_{\mathcal{T}} \dots \quad dA$$

- d) e^z legkisebb periódusa \dots , értékkészlete \dots
- e) Definíció szerint egy D tartomány egyszeresen összefüggő, ha bármely D -beli \dots
- f) Legyen D egy \dots

tartomány a komplex síkon. Legyen az $f : D \rightarrow \mathbf{C}$ függvény \dots . Ekkor f bármely D -ben haladó sima, zárt görbén vett integrálja 0 .

2. (5) Soroljunk fel négy különböző állítást, melyek azal ekvivalensek, hogy a D tartományon értelmezett $\mathbf{F} = (M, N, P)$ vektormező potenciálos (a potenciálosság definíciója is felsorolható). Külön soroljuk fel azokat a feltételeket, melyek fennállása elégséges az ekvivalenciákhoz.

3. (6) Melyek igazak az alábbi állítások közül? Amelyik hamis, azt javítsuk ki egy hasonló, *tanult* állításra!

- a) A komplex ch függvény periodikus!
- b) $\text{rot div } \mathbf{f} = \mathbf{0}$.
- c) $\mathbf{B}'(s) \cdot \mathbf{N}(s) = \tau(s)$.
- d) $\ddot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d}{dt} |\dot{\mathbf{r}}(t)| \mathbf{T}(t) + \kappa(t) |\dot{\mathbf{r}}(t)|^2 \mathbf{N}(t)$.
- e) $|\dot{\mathbf{r}}(t)| = \text{const}$ az értelmezési tartomány minden pontjában pontosan akkor áll fenn, ha $\dot{\mathbf{r}}(t) \perp \mathbf{r}(t)$.
- f) Az \mathbf{F} vektor-vektor függvénynek az $\mathbf{r}(u, v)$ ($(u, v) \in T$) függvénnyel paraméterezett felületen vett felületmenti integrálja kiszámítható a következő képlettel:

$$\pm \iint_T (\mathbf{F}(\mathbf{r}) \times \mathbf{r}_u) \cdot \mathbf{r}_v \, du \, dv.$$

4. (3) Vezessük le a $\text{rot grad } u$ értékéről szóló állítást!

5. (5) Számítsuk ki két különböző módszerrel az $\int_{|z|=2} \frac{2z-1}{z^2-z} dz$ integrált!

6. (5) Oldjuk meg az $x' = x - y$, $y' = 2x + 4y$ homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszert, majd keressük meg az $x(0) = 5$, $y(0) = 0$ kezdeti feltételeket kielégítő megoldást!

8. (3) A Cauchy–Peano-tétel feltételeinek ellenőrzésével döntjük el, hogy a következő kezdetiérték-probléma megoldható-e:

$$y''' = x^2 \sqrt{yy'} - \frac{y^2}{y''}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = -5$$

9. (3) Igazoljuk az $\int_{|z-a|=R} \frac{1}{z-a} = 2\pi i$ összefüggést!

7. (5) Oldjuk meg az Euler-féle $x^2 y'' + 4xy' + 2y = 6x$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$ kezdetiérték-problémát!

10. (5) Tekintsük az $\mathbf{r}(t)$ vektor-skalár függvénnyel megadott görbét. Bizonyítsuk be a görbületére vonatkozó

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\mathbf{T}}(t)|}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|}$$

képletet!