

1. MAT A3 vizsga. 2011-12-22 Neptun: _ _ _ _ _

Név: _____

1. (6) Definiáljuk a következő fogalmakat!

a) Normált főnormális:

b) Torzió:

c) Komplex változós cos függvény:

2. (4) Mutassuk meg, hogy ha r gyöke az $at^2 + bt + c = 0$ egyenletnek, akkor e^{rx} megoldása az $ay'' + by' + cy = 0$ differenciálegyenletnek!

3. (4) Számítsuk ki az $\int_{\mathcal{G}} \frac{1}{z} dz$ integrál értékét, ha \mathcal{G} egy 0 középpű R sugarú kör.

4. (3) Adva van egy egyszerűen összefüggő nyílt D tartomány, és azon értelmezve vannak a 2-változós P és Q függvények, melyek parciális deriváltjai is léteznek és folytonosak D -n. Adjunk meg három állítást, melyek ekvivalensek azzal, hogy az $\mathbf{F} = (P, Q)$ konzervatív a D tartományon. Segítségül megadunk egy-egy kulcsfogalmat:

(a) P'_y, Q'_x :

(b) $\exists f$ 2-változós függvény:

(c) $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ differenciálegyenlet:

5. (6) Melyek igazak az alábbi állítások közül? Amelyik hamis, azt javítsuk ki egy hasonló, *tanult* állításra!

a) A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ sor abszolút konvergens!

b) $\mathbf{rot} \operatorname{div} \mathbf{f} = \mathbf{0}$.

c) $\frac{d\mathbf{B}}{ds} \perp \mathbf{N}$.

d) Ha $|\dot{\mathbf{r}}(t)| = 1$ az értelmezési tartomány minden pontjában, akkor $\dot{\mathbf{r}}(t) \perp \mathbf{r}(t)$.

e) Ha $a_n > 0$ és $n \rightarrow \infty$ esetén $a_n \rightarrow 0$, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ sor konvergens.

f) Ha \mathbf{u} és \mathbf{v} vektorértékű függvények, akkor $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})' = \mathbf{u}' \times \mathbf{v} + \mathbf{v}' \times \mathbf{u}$.

g) A komplex sh függvény periodikus, periódusa 2π .

6. (5) Fogalmazzuk meg az alábbi tételeket!

1. Stokes-tétel!

2. Cauchy-féle integráltétel!

7. (4) Igazoljuk, hogy egy p -sor konvergens, ha $p > 1$!

10. (5) Adjuk meg az $xy' + y = \cos x$ differenciálegyenlet általános megoldását, és az $y(\pi/2) = 0$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldását!

8. (4) Írjuk fel a derékszögű koordináták és a térbeli gömbi koordináták közti kapcsolatot kifejező összefüggéseket! Adjuk meg gömbi koordináták segítségével a 30° félnyílásszögű kúp palástjának egy paraméterezését!

11. (5) Oldjuk meg az $x' = 2x + y$, $y' = 4x + 5y$ homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszert, majd keressük meg az $x(0) = 1$, $y(0) = -1$ kezdeti feltételeket kielégítő megoldást!

9. (4) Az

(a) $y'' - y' = x^2$,

(b) $y'' - y' = x \sin x$,

(c) $y'' - y' = e^x$,

(d) $y'' - y' = xe^x$

differenciálegyenletnek milyen alakban keressük egy-egy partikuláris megoldását?