

1	2	3	4	5
---	---	---	---	---

1. (4) Mondjuk ki és bizonyítsuk az állandó hosszúságú (állandó abszolút értékű) vektorfüggvények deriváltjára vonatkozó tételt!

2. (8) Írjuk fel az $y' = f(x, y)$, $y(\xi) = \eta$ kezdetiérték-problémával ekvivalens integrálegyenletet, és bizonyítsuk be az ekvivalenciát!

Név: _____ Előadó: _____

Σ:

3. (6) Melyek igazak (I), illetve hamisak (H) az alábbi állítások közül? I válasz esetén adjunk rövid indoklást! Ha az állítás egy tanult tétellel azonos, akkor elég annyit írni, hogy „TÉTEL”, N válasz esetén adjunk ellenpéldát, vagy olyan plusz feltételt, amely mellett már igaz az állítás, vagy javítsuk ki az állítást.

a) Ha a komplex $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ függvény eleget tesz a Cauchy–Riemann-féle differenciálegyenleteknek a $z_0 = x_0 + iy_0$ pontban, akkor ott deriválható is.

b) Ha egy f komplex függvény reguláris egy egyszeresen összefüggő T tartományon, és ismerjük f értékét egy T -beli zárt \mathcal{G} görbe pontjaiban, akkor ismerjük a \mathcal{G} által határolt tartomány minden pontjában!

c) Egy inhomogén lineáris differenciálegyenlet megoldásai vektorteret alkotnak, azaz bármely két megoldás összes lineáris kombinációja is megoldás!

4. (10) Definiáljuk a következő fogalmakat!

a) Sima görbe görbülete:

b) A komplex f függvény a $w \in \mathbf{C}$ helyen differenciálható, ha

c) Egzakt differenciálegyenlet:

d) Egy vektormező konzervatív, ha

e) Elliptikus parciális differenciálegyenlet általános alakja:

5. (22=3+3+3+3+2+2+2+2+2) Válaszoljunk az alábbi kérdésekre!
- a) Számítsuk ki az $\mathbf{r}(t) = [t, t^2, t^3]$ görbe $t = 1$ paraméterhez tartozó pontjában a görbületet!
- b) Hogy szól a vonalintegrálok alaptétele? Pontosan soroljuk fel azokat a feltételeket is, amelyek szükségesek a tétel állításának igaz voltához.
- c) Az $y'' - 4y' + 8y = x \cos 2x$ és az $y'' - 4y' + 8y = xe^{2x} \cos 2x$ differenciálegyenletnek milyen alakban keressük egy-egy partikuláris megoldását?
- d) Számítsuk ki a Stokes-tétel segítségével az $\mathbf{r}(\mathbf{v}) = [3x^2y^4, 4x^3y^3 + z^3 + x, 3yz^2]$ vektor-vektor függvény görbementi integrálját az xy -síkban haladó, pozitív körüljárású origó közepű egységkör mentén!
- e) Hányadfokú az alábbi három differenciálegyenlet?
 $y''y = y' - x^3$, $y''y^3 = y' \sin x$, $y'' - 3y' + y = \sin x^3$
- f) Számítsuk ki $\int_{\mathcal{G}} \frac{e^z}{z^2} dz$ értékét, ha \mathcal{G} az origó középpontú egységsugarú kör.
- g) Oldjuk meg az $x' = x + 2y$, $y' = 4x + 3y$ homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszert, ha tudjuk, hogy az $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékei -1 és 5 , és sajátvektorai $(-1, 1)$, $(1, 2)$.
- h) A $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektormező \mathcal{F} felületmenti integrálja egy skálarfüggvény felületmenti integráljának is tekinthető. Melyiknek?
- i) Adjuk meg a gömbfelület egy paraméterezését!